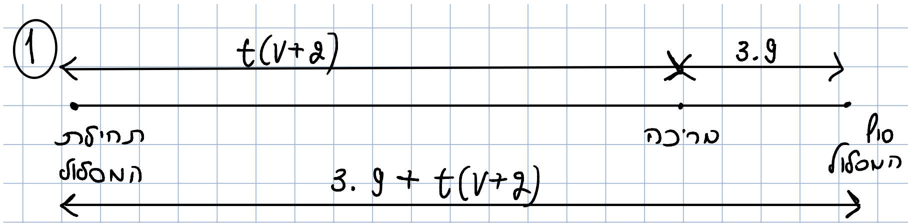
הצעת פתרון לבגרות במתמטיקה

מועד ב׳, קיץ 2024 - שאלון 581

1



א

	S	V	t
נדב (הלוך)	1.8	V	$\frac{1.8}{V}$
נדב (חזור)	1.8	$1.5V$	$\frac{1.2}{V}$
יוסי (בתנועתו הרצופה מתחילת המסלול)	4.8	$1.6V$	$\frac{3}{V}$

$$V_{\text{יוסי}} = 4.8 : \frac{3}{V} = 4.8 \cdot \frac{V}{3} = 1.6V$$

$$\boxed{V_{\text{יוסי}} = 1.6V}$$

ב

	S	V	t
נדב	$t(V+2)$	$V+2$	t
יוסי	$3.9 + t(V+2) - 4.8 = t(V+2) - 0.9$	$1.6V$	$\frac{t(V+2)-0.9}{1.6V}$

$$t = \frac{t(V+2)-0.9}{1.6V}$$

$$1.6Vt = t(V+2) - 0.9$$

$$0.9 = t(V+2) - 1.6Vt$$

$$0.9 = t(V+2-1.6V)$$

$$0.9 = t(2-0.6V)$$

$$\boxed{t = \frac{0.9}{2-0.6V}}$$

ג) לנדב לקח בסה"כ 5.5 שעות להגיע לבריכה. ניתן לחלק את תנועתו לשני חלקים: חלק ראשון שמתאר את תנועתו כשהלך 1.8 ק"מ הלוך וחזור, וחלק שני שמתאר את תנועתו הרכיבה לבריכה (מה שמתואר בסעיפים א׳ ו-ב׳ בהתאמה). לפיכך, נבנה את המשוואה הבאה:

$$\frac{0.9}{2-0.6V} + \frac{3}{V} = \frac{11}{2} \quad \Big/ \ \text{מ"מ} \ 2V(2-0.6V)$$

$$2V \cdot 0.9 + 3 \cdot 2(2-0.6V) = 11V(2-0.6V)$$

$$1.8V + 6(2-0.6V) = 22V - 6.6V^2$$

$$1.8V + 12 - 3.6V = 22V - 6.6V^2$$

$$12 - 1.8V = 22V - 6.6V^2$$

$$6.6V^2 - 23.8V + 12 = 0$$

$V = 3$ או $V = \frac{20}{23}$

(לא מתאים, $V>1$)

$$\boxed{V=3}$$

מבחן מס' 55 - שאלון 581 - קיץ מועד ב'

2. סדרה הנדסית
$2n+1$ איברים חיוביים

$$a_3+a_4+a_5+\dots+a_{2n+1}=4\cdot(a_1+a_2+\dots+a_{2n+1})$$

$$a_{n+2}+a_{n+3}+\dots+a_{2n+1}=512\cdot(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$$

א) $n=?$

$$a_3+a_4+a_5+\dots+a_{2n+1}=4\cdot(a_1+a_2+\dots+a_{2n+1})$$

$$\frac{a_3\cancel{(q^{2n+1}-1)}}{q-1}=4\cdot\frac{a_1\cancel{(q^{2n+1}-1)}}{q-1}$$

$$a_3=4a_1$$

$$a_1q^2=4a_1 \quad /:a_1$$

$$q^2=4$$

$$\boxed{q=2}$$

$$a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+\dots+a_{2n+1}=512(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$$

$$\frac{a_{n+2}\cancel{(q^n-1)}}{q-1}=512\cdot\frac{a_1\cancel{(q^n-1)}}{q-1}$$

$$a_{n+2}=512\cdot a_1$$

$$a_1q^{n+2-1}=512\cdot a_1 \quad /:a_1$$

$$q^{n+1}=512$$

$$2^{n+1}=512$$

$$2^{n+1}=2^9$$

$$n+1=9$$

$$\boxed{n=8}$$

ב) הוכחה:

$$b_k=\frac{1}{(a_k+a_{k+1})^2}=\frac{1}{(a_k+a_k\cdot q)^2}=\frac{1}{(a_k+2a_k)^2}=\frac{1}{9a_k^2}$$

$$q_b=\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{1}{9a_{k+1}^2}:\frac{1}{9a_k^2}=\frac{9a_k^2}{9a_{k+1}^2}=\frac{a_k^2}{9\cdot(a_k\cdot 2)^2}=\frac{\cancel{a_k^2}\cdot\cancel{9}}{\cancel{9}\cdot 4\cdot\cancel{a_k^2}}=\frac{1}{4}$$

$\Downarrow$

$0<q_b<1$ וגם
הסדרה b_k סדרה הנדסית אין-סופית

מ.ש.ל

ג $a_1 = ?$

$$b_1+b_3+b_5+\ldots = \frac{1}{30} + 2b_2+2b_4+2b_6+\ldots$$

$$b_1+b_3+b_5+\ldots = \frac{1}{30} + 2(b_2+b_4+b_6+\ldots)$$

$$\frac{b_1}{1-q_b^2} = \frac{1}{30} + \frac{2b_2}{1-q_b^2}$$

$$\frac{b_1-2b_2}{1-q_b^2} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{b_1-2b_1\cdot\frac{1}{4}}{1-(\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{\frac{b_1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{16b_1}{30} = \frac{1}{30}$$

$$b_1 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{9a_1^2} = \frac{1}{16}$$

$$9a_1^2 = 16$$

$$a_1^2 = \frac{16}{9}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{4}{3}}$$

3.

חברים בתנועת נוער

מתנדבים בקהילה 0.7

לא מתנדבים בקהילה 0.3

א

$$P\left(\text{משפחות תלמידי אחד מתנדב ואחד לא מתנדב}\right) = 1-\left[P\left(\text{כולם מתנדבים}\right)+P\left(\text{כולם לא מתנדבים}\right)\right] = 1-\left(P_{n=5}(k=5)+P_{n=5}(k=5)\right)=$$

$$= 1-\left[\binom{5}{5}\cdot 0.7^{5}\cdot 0.3^{0}+\binom{5}{5}\cdot 0.3^{5}\cdot 0.7^{0}\right] = 1-(0.16807+0.00243) = 1-0.1705 = 0.8295$$

ב

	חבר בתנועה A	לא חבר בתנועה $\bar{A}$	סך הכל
מתנדב בקהילה B	$0.7x$	$\frac{1}{12}(1-x)$	
לא מתנדב בקהילה $\bar{B}$	$0.3x$	0.55	$0.55+0.3x$
סך הכל	x	$1-x$	100%

נבנה משוואה עפ"י הטבלה שבנינו:

$$\frac{1}{12}(1-x)+0.55 = 1-x \quad / \cdot 12$$

$$1-x+6.6 = 12-12x$$

$$7.6-x = 12-12x$$

$$11x = 4.4$$

$$\boxed{x=0.4}$$

ג

$$P(A\cap B) = 0.7x = 0.3\cdot 0.4 = 0.12$$

מס' הילדים שהשתתפו במחקר הוא $0.12\cdot 100 = 12$

ד

נשלים את הטבלה עפ"י ערך ה-X שמצאנו:

		A	$\bar{A}$	
		חבר בתנועה	לא חבר בתנועה	סך הכל
B	מתנדב בקהילה	0.28	0.05	0.33
$\bar{B}$	לא מתנדב בקהילה	0.12	0.55	0.67
	סך הכל	0.4	0.6	100%

(1) נסמן את ההסתברות המבוקשת - P_1

$$P_1 = \frac{12}{67} \cdot \frac{55}{66} \cdot \frac{54}{65} = \frac{108}{871}$$

יש לשים לב לשינוי במספר התלמידים המוצגים בחישוב

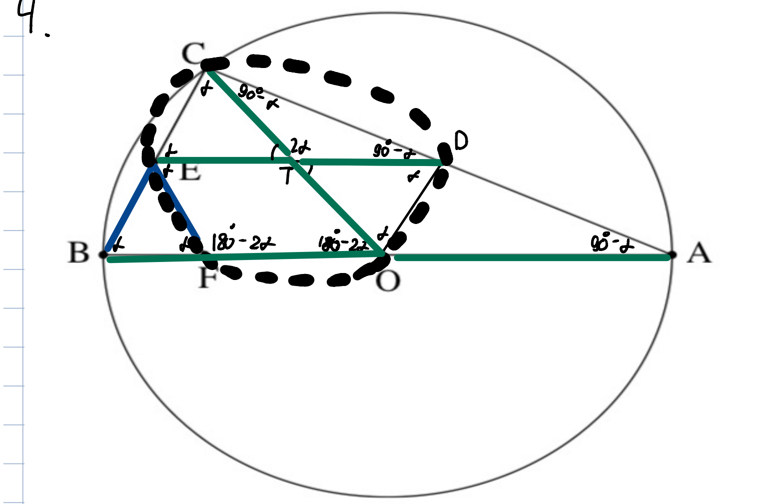
(2) נשים לב כי בסעיף זה מדובר בהסתברות מותנית היות וידוע לנו כי התלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער

נסמן את ההסתברות המבוקשת בשאלה זו - P_2

$$P_2 = \frac{54}{66} \cdot \frac{12}{65} + \frac{12}{66} \cdot \frac{54}{65} = \frac{216}{715}$$

בסעיף זה יש לשים לב לשני התרחישים האפשריים. הראשון מביניהם הוא שהתלמיד השני שנבחר לא חבר בתנועת נוער ושזה שנבחר אחריו כן חבר בתנועת נוער. התרחיש השני הוא מצב בדיוק הפוך - שהתלמיד השני שנבחר חבר בתנועת נוער ושהתלמיד השלישי אינו חבר בתנועת נוער. בחישוב ההסתברות המבוקשת לא התייחסנו לסוג התלמיד הנבחר בפעם הראשונה משום שסוגו ידוע מראש.

4.



נתון:

ΔABC, $AB = 2R$

CEFO מרובע בר חסימה

הוכחה:

א) $CO = BO$ (רדיוסים במעגל שווים זה לזה)

$\Downarrow$

ΔBOC משולש שווה שוקיים (שוקיים שוות)

$\Downarrow$

נסמן: $\sphericalangle OBC = \sphericalangle BCO = \alpha$ (במשו"ש זוויות הבסיס שוות)

$\sphericalangle FEO = 180° - \alpha$ (במרובע בר חסימה, סכום זוויות נגדיות הוא $180°$)

$\sphericalangle BFE = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$ (השלמה ל- $180°$)

$\sphericalangle EFB = \sphericalangle EBF = \alpha$ (כלל מעבר)

$\Downarrow$

$\triangle BEF$ משו"ש (משו"ש, זוויות הבסיס שוות)

$\Downarrow$

$\boxed{EF = EB}$ (במשו"ש שוקיים שוות)

מש"ל

ב

(1) נסמן את נקודת המפגש של הצלעות ED ו- CO כ- T.

$\sphericalangle EBF = \sphericalangle CET = \alpha$ (זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים)

$\sphericalangle BCO = \alpha$ (סימנו בסעיף הקודם)

$\Downarrow$

$\sphericalangle EDO = \alpha$ (שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו)

$\Downarrow$

$\sphericalangle EDO = \sphericalangle CET = \alpha$ (כלל מעבר)

$\Downarrow$

$CE \parallel DO$ (זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)

$\Downarrow$

$BE \parallel DO$ (CE המשך הצלע BE)

(נתון) $ED \parallel AB$

$ED \parallel BO$ (BO הוא חלק מהקטע AB)

קיבלנו ש:

(כלל מעבר) $ED \parallel BO$, $BE \parallel OD$

$\Downarrow$

$\boxed{EDOB \text{ מקבילית}}$

(מרובע שבו קיימים 2 זוגות של צלעות מקבילות נקרא מקבילית)

מש"ל

(2)

(חיבור זוויות) $\measuredangle ODC = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$

$\Downarrow$

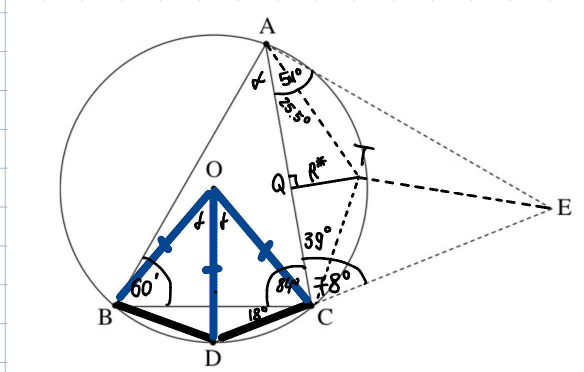
$\boxed{OD \perp AC}$

מש"ל

(3) נקודה C היא נקודה אשר נמצאת גם על המעגל החוסם את המשולש $\triangle ABC$ וגם על המעגל החוסם את המרובע CEFO. לכן, היות והישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש $\triangle ABC$, אז הוא גם משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO

מש"ל

5.



נתון:

$\triangle ABC$, R . $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$

$\measuredangle ABC = 60°$, $\measuredangle BAC = \alpha$

א

$\triangle ODC$:

$$S_{\triangle ODC} = \frac{OD \cdot OC \cdot \sin\measuredangle DOC}{2}$$

(זווית מרכזית כפולה פי' שניים מזווית היקפית שנשענת על אותה הקשת) $\measuredangle BOC = 2\measuredangle BAC = 2\alpha$

(נתון) $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$

$\Downarrow$

(זוויות מרכזיות שוות נשענות על קשתות שוות) $\measuredangle BOD = \measuredangle DOC = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

$$\boxed{S_{\triangle ODC} = \frac{R^2 \cdot \sin\alpha}{2}}$$

$\triangle ABC$: לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \qquad \frac{AC}{\sin 60°} = 2R$$

$$BC = 2R\sin\alpha \qquad AC = \sqrt{3}R$$

(ב Δ סכום הזוויות הוא 180°) $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle ACB}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}R \cdot \cancel{2}R\sin\alpha \cdot \sin(120^\circ-\alpha)}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(120^\circ-\alpha)}$$

ב) $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ODC} = \sqrt{3}\cancel{R^2} \cdot \cancel{\sin\alpha} \cdot \sin(120^\circ-\alpha) \cdot \frac{2}{\cancel{R^2} \cdot \cancel{\sin\alpha}} = 2\sqrt{3}\sin(120^\circ-\alpha)$

$$2\sqrt{3}\sin(120^\circ-\alpha) = 2\sqrt{3}\cdot\sin 84^\circ$$

$$\sin(120^\circ-\alpha) = \sin 84^\circ$$

$$120^\circ - \alpha = 84^\circ$$

$$\boxed{36^\circ = \alpha}$$

ג) (זווית היקפית שווה למחצית מגודל הזווית המרכזית שנשענת על אותה הקשת) $\sphericalangle BCD = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$

(ב Δ סכום הזוויות הוא 180°) $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 36^\circ - 60^\circ = 84^\circ$

(השלמה לזווית שטוחה) $\sphericalangle ACE = 180^\circ - 84^\circ - 18^\circ = 78^\circ$

בניית עזר: חוצי זוית מכל אחד מהקודקודים E,C,A שנפגשים בנקודה שנסמן כ- T.

$\triangle ATC$:

(חושב) $AC=\sqrt{3}R$

(ב- $\triangle$ סכום הזוויות הוא 180°) $\measuredangle ATC = 180^\circ - 25.5^\circ - 39^\circ = 115.5^\circ$

עפ"י משפט הסינוסים:

$$\frac{AT}{\sin 36^\circ} = \frac{AC}{\sin(118.5^\circ)}$$

$$AT = \frac{\sqrt{3}R \cdot \sin 39^\circ}{\sin 115.5^\circ}$$

$$AT = 1.2076R$$

בניית עזר: TQ – רדיוס המעגל החסום במשולש $\triangle ACE$

$\triangle TQA$:

$$\sin 25.5^\circ = \frac{TQ}{AT}$$

$$TQ = AT \cdot \sin 25.5^\circ$$

$$TQ = 1.2076R \cdot \sin 25.5^\circ$$

$$TQ = 0.5199R \approx 0.52R$$

$$\boxed{R^* = 0.52R}$$

למה $TQ = R^*$?

מעגל החסום במשולש משיק לכל אחת מצלעות המשולש. ידוע לנו כי רדיוס מאונך למשיק. לפיכך האנך TQ, יוצא ממרכז המעגל החסום במשולש $\triangle ACE$, הוא רדיוס.

6. $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-a)^3}$ $\boxed{x \neq a}$ $\boxed{a \neq 0}$

א'

(1) אסימפטוטה אנכית: $x = a$

אסימפטוטה אופקית:

$y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-1}{(x-a)^3} = 0$ (חזקה של מונה קטנה מחזקה של מכנה)

$\boxed{x = a,\ y = 0}$

(2) חיתוך עם ציר ה-y: $x = 0$:

$f(0) = \dfrac{0-1}{(0-a)^3} = \dfrac{-1}{-a^3} = \dfrac{1}{a^3}$

$\boxed{\left(0, \dfrac{1}{a^3}\right)}$

ב'

נקודות קיצון:

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x-a)^3 - (x-1) \cdot 3(x-a)^2}{[(x-a)^3]^2} = \dfrac{\cancel{(x-a)^2}[x-a-3(x-1)]}{(x-a)^{\cancel{6}}} =$

$= \dfrac{x-a-3x+3}{(x-a)^2} = \dfrac{3-2x-a}{(x-a)^2} = 0$

$\dfrac{3-2x-a}{(x-a)^2} = 0 \quad / \cdot (x-a)^2$

מ"מ $(x-a)^2$

$$f'(x) = \frac{3-2x-a}{(x-a)^2}$$

(מונה) $f''(x) = -2x < 0$ max

$$3-2x-a=0$$
$$3-a=2x$$
$$x=\frac{3-a}{2}$$

$$\frac{3-a}{2} < a$$
$$3-a < 2a$$
$$3 < 3a$$
$$\boxed{a>1}$$

ג

כאשר $a>1$, נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ נמצאת משמאל לאסימפטוטה $x=a$. גרף 1 מתאים לתיאור זה. (IV)

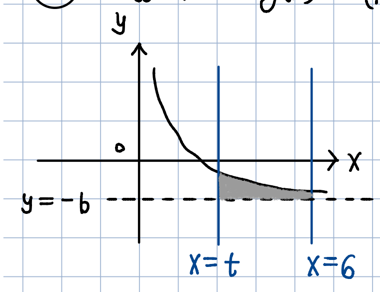
כאשר $a=1$, שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא $x=a$, מה שלא יתכן עפ"י תחום ההגדרה של הפונקציה. לכן, במצב כזה לפונקציה $f(x)$ אין נקודת קיצון. גרף 2 מתאים לתיאור זה. (III)

כאשר $a=\frac{1}{2}$, האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$ היא $x=\frac{1}{2}$, ולכן היא נמצאת בחלקו החיובי של ציר ה-x. גרף 3 מתאים לתיאור זה. (II)

כאשר $a=-1$, האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$ היא $x=-1$, ולכן היא נמצאת בחלק השלילי של ציר ה-x. גרף 4 מתאים לתיאור זה. (I)

ד

$a=1$ $\quad g(x) = \frac{x-1}{(x-1)^3} - b = \frac{1}{(x-1)^2} - b = f(x) - b$ $\quad S = 3.8$



השטח המבוקש מסומן בצבע אפור

$$S = \int_t^6 [f(x) - b - (-b)]\,dx = \int_t^6 (f(x) - b + b)\,dx = \int_t^6 f(x)\,dx =$$

$$= \int_t^6 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_t^6 (x-1)^{-2}\,dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\Big|_t^6 = -\frac{1}{x-1}\Big|_t^6 =$$

$$= -\frac{1}{6-1} - \left(-\frac{1}{t-1}\right) = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{t-1}-\frac{1}{5}=3.8$$

$$\frac{1}{t-1}=4$$

$$t-1=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{t=1\frac{1}{4}}$$

כאשר $x=t$ הפונקציה $g(x)$ חותכת את ציר ה-x. בחיתוך עם ציר ה-x: $y=0$, לכן:

$$g(x)=0$$

$$f(x)-b=0$$

$$f(x)=b$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}=b$$

$$b=\frac{1}{(1\frac{1}{4}-1)^2}$$

$$\boxed{b=16}$$

הערה: השטח שחישבנו בשאלה, S, נמצא מתחת לציר ה-x, מה שבאופן מסוים עלול להשפיע על חישוב האינטגרל, הרי ידוע שבמקרים מהסוג הזה נדרש להוסיף (-) לאינטגרל. בתרגיל הזה לא פעלנו כך משום שהאינטגרל שחישבנו הוא בעצם על הפונקציה $f(x)$ כאשר $a=1$, שחיובית בתחום $x>0$, ועל כן לא הוספנו (-) לחישוב האינטגרל.

7. $f(x) = (b+\cos x)\cdot \sin x$ $\boxed{-\pi \leq x \leq \pi}$

א $f(-x) = [b+\cos(-x)]\cdot \sin(-x) = (b+\cos x)\cdot(-\sin x) = -(b+\cos x)\cdot \sin x = -f(x)$

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$
הפונקציה אי-זוגית

ב חיתוך עם ציר ה-x: $y=0$:

$$\sin x\,(b+\cos x) = 0$$

$\sin x = 0$ $\cos x = -b$

$x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$k=0$ $x=0$ ✓

$k=1$ $x=\pi$ ✓

$k=-1$ $x=-\pi$ ✓

ידוע לנו כי $-1 \leq \cos x \leq 1$
וכי לפונקציה הנתונה 3 נקודות
חיתוך עם ציר ה-x. לכן, לא
יתקבלו נקודות חיתוך נוספות
ממשוואה זו, ולכן אין לה פתרון.

לכן: $\boxed{b \geq 1}$

ג $f'(x) = -\sin x\cdot\sin x + (b+\cos x)\cdot\cos x = -\sin^2 x + b\cdot\cos x + \cos^2 x = -(1-\cos^2 x) + b\cdot\cos x + \cos^2 x$

$= \cos^2 x - 1 + b\cdot\cos x + \cos^2 x = 2\cos^2 x + b\cdot\cos x - 1$

$$2\cos^2 x + b\cdot\cos x - 1 = -\frac{5}{8}$$
$$2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + b\cdot\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$$
$$\frac{2}{16} + \frac{b}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{b}{4} = \frac{1}{4}$$
$$\boxed{b = 1}$$

(9)

נקודות קיצון:

$$f'(x) = 2\cos^2 x + 1\cdot\cos x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0, \quad x = \frac{\pi}{3}$ ✓

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

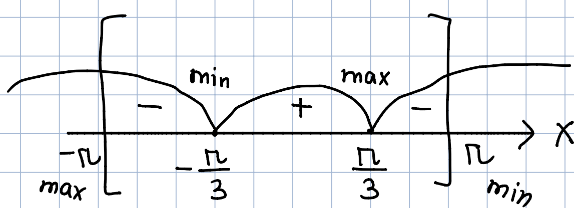
$x = -\frac{\pi}{3}$ ✓

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \quad x = \pi$ ✓

$k = -1 \quad x = -\pi$ ✓



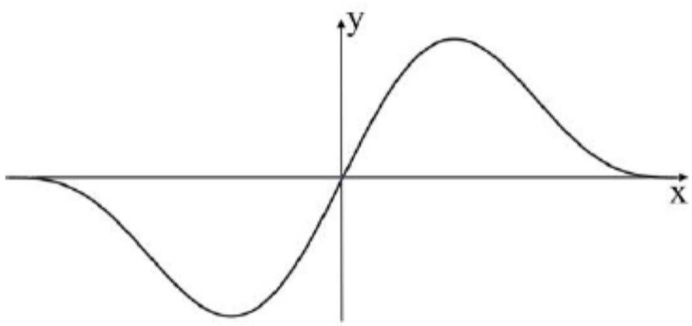
$(-\pi, 0)$ max $\quad f(-\pi) = 0 \quad$ (חישבנו בסעיף הקודם)

$(\pi, 0)$ min $\quad f(\pi) = 0 \quad$ (חישבנו בסעיף הקודם)

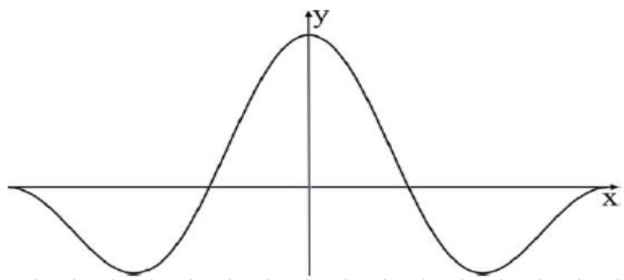
$\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ max $\quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left[1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ min $\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

ה (1)



(2)



1 $g(x)=(f(x))^2\cdot f'(x)$

אותו שטח מבוקש נמצא בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{3}$, שנמצא מעל ציר ה-x ברביע הראשון של הפונקציה. נחשב את השטח הנ"ל באופן המפורט הבא:

$$\int f^2(x)\cdot f'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)\,dx=dt \end{matrix} \right| = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{1}{3}f^3(x)+C$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}} g(x)\,dx = \frac{1}{3}f^3(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\cdot f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{3}\cdot f^3(0) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^3 = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{3^{\cancel{3}}\cdot 3\sqrt{3}}{4^3} = \frac{3^3\sqrt{3}}{4^3}$$

$$\boxed{S=\frac{27\sqrt{3}}{64}\ \text{יח"ר}}$$

8

$f(x) = \sqrt{x}$ $\boxed{x \geq 0}$, $g(x) = \frac{32}{x^2+3}$

א

(1)

נקודת קיצון:

$$g'(x) = \frac{0\cdot(x^2+32) - 32\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{64x}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$-\frac{64x}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$-64x = 0$$

$$x = 0$$

$$(\text{מונה})\ g''(x) = -64 < 0 \quad max$$

$$\left(0, 10\tfrac{2}{3}\right) max \qquad g(0) = \frac{32}{0^2+3} = 10\tfrac{2}{3}$$

$$\boxed{\left(0, 10\tfrac{2}{3}\right) max}$$

(2)

נקודות פיתול:

$$g''(x) = -\frac{64\cdot(x^2+3)^2 - 64x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{[(x^2+3)^2]^2} = \frac{64\cancel{(x^2+3)}[(x^2+3) - 4x^2]}{(x^2+3)^{\cancel{4}}} = \frac{64(3-3x^2)}{(x^2+3)^3} =$$

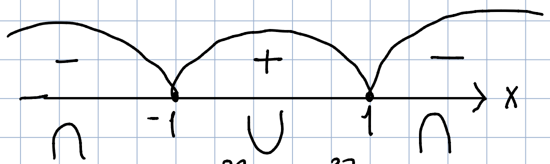
$$= \frac{192(1-x^2)}{(x^2+3)^3} = 0$$

$$\frac{192(1-x^2)}{(x^2+3)^3} = 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$



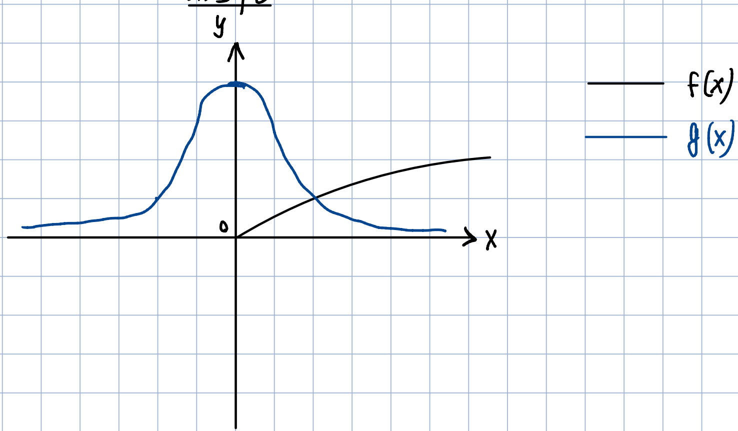
$(1, 8)$ פיתול $\quad g(1) = \frac{32}{1^2+3} = \frac{32}{4} = 8$

$(-1, 8)$ פיתול $\quad g(-1) = \frac{32}{(-1)^2+3} = \frac{32}{4} = 8$

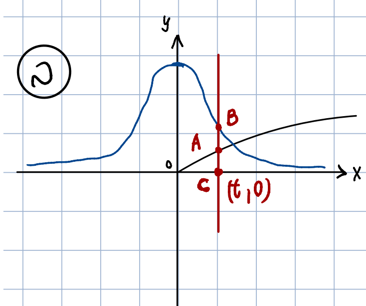
$\boxed{(1, 8) \text{ פיתול }, (-1, 8) \text{ פיתול }}$

(3)

סקיצה:



ב



$A(t, \sqrt{t})$

$B\left(t, \frac{32}{t^2+3}\right)$

$C(t, 0)$

$AC = \sqrt{t}$

$BC = \frac{32}{t^2+3}$

$$\boxed{AC \cdot BC = \frac{32\sqrt{t}}{t^2+3}}$$

(ו) <u>הוכחה:</u>

$$b(t) = \frac{32\sqrt{t}}{t^2+3} = 32 \cdot \frac{\sqrt{t}}{t^2+3}$$

$$b'(t) = 32 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (t^2+3) - \sqrt{t} \cdot 2t}{(t^2+3)^2} = 32 \cdot \frac{\frac{t^2+3}{2\sqrt{t}} - \frac{2\sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}}{(t^2+3)^2} = 32 \cdot \frac{\frac{t^2+3-4t^2}{2\sqrt{t}}}{(t^2+3)^2} =$$

$$= \cancel{32} \cdot \frac{3-3t^2}{\cancel{2}\sqrt{t}\,(t^2+3)} = 16 \cdot \frac{3(1-t^2)}{\sqrt{t}\,(t^2+3)} = 48 \cdot \frac{1-t^2}{\sqrt{t}\,(t^2+3)}$$

$$48 \cdot \frac{1-t^2}{\sqrt{t}\,(t^2+3)} = 0 \quad / \cdot \sqrt{t}\,(t^2+3) \text{ מ״מ}$$

$$48(1-t^2) = 0 \quad / : 48$$

$$1-t^2 = 0$$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1 \quad (t > 0)$$

$$(\text{מונה})\ b''(t) = -2t \Rightarrow (\text{מונה})\ b''(1) = -2 < 0 \quad max$$

$$\boxed{\text{כאשר } t=1 \text{ שיעור הנקודה } B \text{ הם } B(1,8)\text{, כמו אלה של נק' הפיתול של הפונקציה } g(x)}$$

מש״ל

(ז)

$$k(x) = \frac{8\sqrt{x-5}}{(x-5)^2+3} \xrightarrow[\ ]{\text{נסמן: } x-5=a} k(x) = \frac{8\sqrt{a}}{a^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{32\sqrt{a}}{a^2+3}$$

מזכיר מאוד את הפונקציה $b(t)$

המבנה של הפונקציה $k(x)$ דומה מאוד לזה של $b(t)$. את נק' הקיצון של הפונקציה $b(t)$ מצאנו כאשר $t=\pm 1$. המקביל ל-t בפונקציה $k(x)$ הוא a, לכן נמצא את נקודת הקיצון הפנימית של פונקציה זו באופן המתאים בעזרת הצבה. סוג הקיצון בפונקציה $b(t)$ הוא מקסימום, לכן גם נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$ היא מסוג מקסימום (max).

$a = \pm 1$

$a = 1 \quad (a > 0)$

הצבה: $a = x - 5$:

$x - 5 = 1$

$x = 6$

$k(6) = \frac{8\sqrt{6-5}}{(6-5)^2+3} = \frac{8}{4} = 2 \quad (6, 2)\ max$

$\boxed{(6, 2)\ max}$