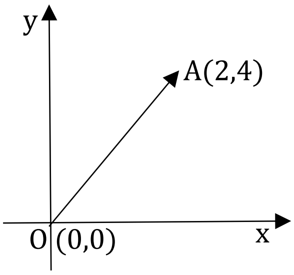
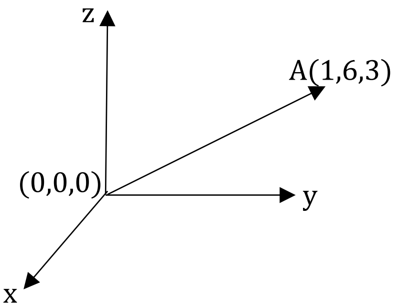
וקטורים (גישה אלגברית)

← **גאומטריה אנליטית במרחב תלת מימדי**



1. וקטור אלגברי דו-מימדי – הנקודה $A(2,4)$ בשרטוט מוצגת במישור הדו מימדי xy. החץ היוצא מהנקודה O (ראשית הצירים) ומסתיים בנקודה $A(2,4)$ מסומן ע"י $\overrightarrow{OA}$, ניתן לאמר כי $\overrightarrow{OA}=(2,4)$ ואם נסמן וקטור זה ע"י $\underline{u}$ נאמר כי $\underline{u}=(2,4)$. כל נקודה הנמצאת במישור xy וצורתה (x,y) נקראת וקטור דו מימדי והיא מתארת את החץ המתחיל בראשית הצירים ומסתיים בנקודה עצמה. מכאן, נכון לומר כי וקטור הוא נקודה, אך נשים לב שהכוונה היא לחץ, קטע בעל אורך וכיוון שראשיתו בנקודה $(0,0)$ וסופו בנקודה הנידונה.



2. וקטור אלגברי תלת מימדי – הנקודה $A(1,6,3)$ בשרטוט מוצגת במרחב התלת מימדי xyz, החץ היוצא מנקודה O (ראשית הצירים) ומסתיים בנקודה $A(1,6,3)$ מסומן ע"י $\overrightarrow{OA}$, ניתן לומר $\overrightarrow{OA}=(1,6,3)$. ואם נסמן וקטור זה ע"י $\underline{u}$ נאמר כי $\underline{u}=(1,6,3)$. כל נקודה הנמצאת במרחב xyz וצורתה (x,y,z) נקראת וקטור תלת מימדי והיא מתארת חץ המתחיל בראשית הצירים ומסתיים בנקודה עצמה. מכאן, נכון לומר כי וקטור הוא נקודה, אך נשים לב שהכוונה היא לחץ, לקטע שראשיתו בנקודה $(0,0,0)$ וסופו בנקודה.

<u>הערה</u>: לרוב נעסוק במרחב התלת מימדי.

3. גודלו (אורכו) של וקטור – את האורך של הווקטור $\underline{u}=(x,y,z)$ מסמנים $|\underline{u}|$ והוא מוגדר להיות המרחק בין הנקודה (x,y,z) לבין ראשית הצירים, ולכן $|\underline{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4. וקטור שגודלו יחידה אחת – וקטור שאורכו יחידה אחת, שגודלו שווה 1, נקראת וקטור יחידה.

5. חיבור וקטורים אלגבריים – נסמן: $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$, ונאמר כי ניתן לחבר את $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, נסמן זאת: $\underline{u}+\underline{v}$, ונגדיר זאת: $\underline{u}+\underline{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$.

דוגמה: $\underline{u}=(2,3,5)$,$\underline{v}=(-1,4,7) \Rightarrow \underline{u}+\underline{v}=(2+(-1),3+4,5+7)=(1,7,12)$.

6. חיסור וקטורים אלגבריים – נסמן: $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$, ונאמר כי ניתן לחסר את $\underline{v}$ מ- $\underline{u}$, נסמן זאת $\underline{u}-\underline{v}$, ונגדיר זאת: $\underline{u}-\underline{v}=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$.

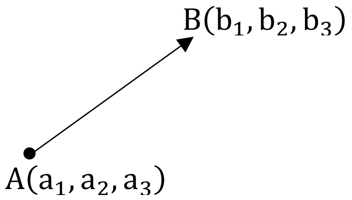
דוגמה: $\underline{u}=(1,3,2)$,$\underline{v}=(-2,0,9) \Rightarrow \underline{u}-\underline{v}=(1-(-2),3-0,2-9)=(3,3,-7)$.

7. מכפלת וקטור בסקלר – יהי וקטור אלגברי $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, ויהי סקלאר t, מכפלת הוקטור $\underline{a}$ בסקלאר t מסומנת $t\underline{a}$ ומוגדרת להיות: $t\underline{a} = t(a_1, a_2, a_3) = (ta_1, ta_2, ta_3)$.

דוגמה: $3 \cdot (-2,4,1) = (-6,12,3)$

הערה: אם $t > 1$ אנו "מותחים" את $\underline{a}$ ושומרים על כיוונו,
אם $t = 1$ הוקטור $\underline{a}$ לא משתנה,
אם $0 < t < 1$ אנו "מכווצים" את $\underline{a}$ ושומרים על כיוונו,
אם $t = 0$ אנו "מכווצים" את $\underline{a}$ להיות נקודה, כלומר $\underline{a} = 0$,
אם $t < 0$ אנו משנים את כיוונו של $\underline{a}$ באופן מנוגד.

8. **מציאת הוקטור $\overrightarrow{AB}$ כאשר נתונות הנקודות** A ו- B –



יהיו שתי הנקודות $A(a_1, a_2, a_3)$ ו- $B(b_1, b_2, b_3)$, הוקטור $\overrightarrow{AB}$ המתחיל בנקודה A ומסתיים בנקודה B מוגדר להיות:

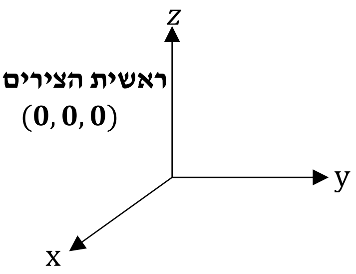
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

דוגמה: $A(2,-2,1)\,, B(5,-4,3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = B - A = (5,-4,3) - (2,-2,1) = (3,-2,2)$.

הערה: הוקטור $\overrightarrow{AB}$ שווה לוקטור שראשיתו $O(0,0,0)$ וסופו בנקודה $(3,-2,2)$.

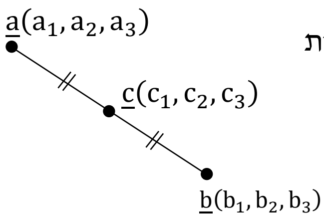
9. מהו הכיוון של הוקטור האלגברי? – הכיוון של הוקטור $\overrightarrow{AB}$ מוגדר להיות $B - A$.
הערה: כיוון של וקטור אלגברי, במידה מסוימת, מזכיר לנו שיפוע של קו ישר.

10. הכיוונים של ציר ה- x, ציר ה- y וציר ה- z –

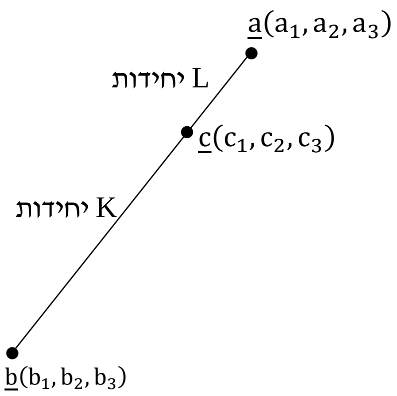


נבחר 2 נקודות על ציר ה- x: $A(1,0,0)$ ו- $B(2,0,0)$,
הוקטור $\overrightarrow{AB}$ יהיה: $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,0,0)$,
מקובל לומר שכיוונו של ציר ה- x יהיה $(1,0,0)$, עם זאת יודגש כי אפשר שכיוונו יהיה $(3,0,0)$ או $(6,0,0)$ אך משיקולי נוחות נתייחס לווקטור $(1,0,0)$ כאל כיוונו של ציר ה- x, באופן דומה נאמר כי כיוונו של ציר ה- y הוא $(0,1,0)$ ושל ציר z הוא $(0,0,1)$.
<u>הערה</u>: מותר ונכון משיקולי נוחות לצמצם כיוון של וקטור, כך למשל אם הכיוון של וקטור הוא $(8,-6,2)$ יהיה נוח לצמצם ב- 2 ולקבל $(4,-3,1)$.

11. אמצע קטע – הנקודה/ הוקטור $\underline{c}(c_1, c_2, c_3)$ תהיה נקודת אמצע הקטע שקצותיו $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ ו- $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ אם מתקיים: $c_3 = \frac{a_3+b_3}{2}\,, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}\,, c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.



12. חלוקת קטע ביחס נתון – הנקודה $\underline{c}(c_1, c_2 c_3)$ מחלקת את הקטע שקצותיו הם $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ ו- $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ ביחס $K : L$ כפי שמוצג בשרטוט משמאל, אם מתקיים:



$$c_1 = \frac{K \cdot a_1 + L \cdot b_1}{K + L}$$

$$c_2 = \frac{K \cdot a_2 + L \cdot b_2}{K + L}$$

$$c_3 = \frac{K \cdot a_3 + L \cdot b_3}{K + L}$$

13. מכפלה סקלרית (בגישה האלגברית) – יהיו שני וקטורים $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ ו- $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$,

המכפלה סקלרית של $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ מסומנת ע"י $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ומוגדרת להיות:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

<u>דוגמה</u>:

$$\underline{a} = (1,2,-2)\ , \underline{b} = (3,-1,-1) \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = (1,2,-2) \cdot (3,-1,-1) = 3 + 2(-2) + 2 = 3$$

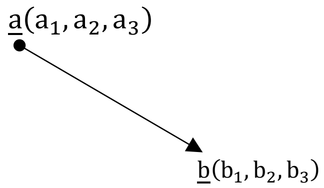
<u>הערות</u>:

(1) תוצאות המכפלה סקלרית הינה מספר חופשי (סקלר), ומכאן זהו שמה.

(2) אם: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, אז: $\underline{u} \perp \underline{v}$ (גם להיפך).

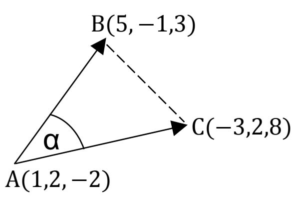
14. אורך וקטור/אורך קטע/מרחק בין שתי נקודות –

אורכו (גודלו) של הוקטור שבציור, הוא גם אורך הקטע אשר קצותיו הם: $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ ו- $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$, והוא גם המרחק בין שתי הנקודות $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$, נסמנו ע"י d ונגדיר אותו להיות: $d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.



15. מציאת זווית הכלואה בין שני וקטורים –

הדוגמה הבאה תציג את התהליך הנדרש למציאת α, נסתפק בה מבלי להציג זאת באופן כללי.



צעד 1 – מציאת $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = B - A = (5,-1,3) - (1,2,-2) = 4,-3,5)$

צעד 2 – מציאת $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,2,8) - (1,2,-2) = (-4,0,10)$

צעד 3 – מציאת $|\overrightarrow{AB}|$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^3 + (3+2)^2} =$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{169+9+25} = \sqrt{50}\ \text{יח'}$$

צעד 4 – מציאת $\left|\overrightarrow{AC}\right|$:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3-1)^2+(2-2)^3+(8+2)^2} =$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+0+100} = \sqrt{116}\ \text{יח'}$$

צעד 5 – הפעלת נוסחת המכפלה הסקאלרית:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$(4,-3,5)\cdot(-4,0,10) = \sqrt{50}\cdot\sqrt{116}\cdot\cos\alpha$$

$$-16+0+50 = \sqrt{50}\cdot\sqrt{116}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{34}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{116}} = \cos\alpha$$

$$\alpha = 63.484°$$

הערות:

(1) נתבונן בשטח משולש ABC בציור המופיע בראשית העמוד, ניתן לחשב אותו ע"י הנוסחה הבאה: $S_\Delta = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}$, כלומר – בהינתן שלושה קדקודי משולש נדע לחשב את שטחו, באופן רחב יותר נאמר כי אם נתונות לנו נקודות של מצולע מסוים נוכל לחשב את שטחו ע"י חלוקת משולשים, כעת אנו מסיקים שביכולתנו לחשב שטח של כל מצולע בהינתן שיעורי קדקודיו.

(2) ממשוואת המכפלה הסקלרית: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha$, נחלץ את $\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, כיוון שהמכנה חיובי נוכל להתפנות לבחון את הסימן של המונה:

* אם: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > 0$, אז: $\cos\alpha > 0$, ולכן: $0° < \alpha < 90°$.
* אם: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, אז: $\cos\alpha = 0$, ולכן: $\alpha = 90°$, ולכן: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.
* אם: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} < 0$, אז: $\cos\alpha < 0$, ולכן: $90° < \alpha < 180°$.

(3) יש להקפיד ששני הווקטורים "יוצאים" מאותה נקודה או "נכנסים" לאותה נקודה.

16. הצגה פרמטרית של ישר במרחב – הצגתו הפרמטרית של הישר l_1 שכיוונו $\underline{b}$ והוא עובר דרך הנקודה $\underline{a}$ היא $\underline{a}+t\cdot\underline{b}$, כותבים זאת כך –

$$l_1: \underline{a}+t\cdot\underline{b}$$

דוגמה: l_2 הוא ישר העובר דרך $(1,2,3)$ וכיוונו $(-1,2,4)$, נציג אותו –

$$l_2: (1,2,3)+t(-1,2,4)$$

הערה: ניתן להציג את l_2 כנקודה כללית $(1-t, 2+2t, 3+4t)$, צורה זו נקראת גם נקודה אופיינית של הישר, ניתן גם לומר שהצגנו את l_2 בצורה שלשה.

17. **מציאת נקודה כלשהי שנמצאת על קו ישר** – נחזור לישר l_2 $(1,2,3)+t(-1,2,4)$, נציגו שוב כשלשה $(1-t,2+2t,3+4t)$ וכעת נציב $t=2$ ונקבל את הנקודה $(-1,6,11)$, נקודה זו שהתקבלה ע״י הצבת $t=2$ נמצאת על l_2, כל ערך של t שנציב בהצגת הישר יוביל למציאת נקודה נוספת על הישר.

הערה: נתבונן בנקודה הכללית הבאה $(3+2t,5-t,-2+t)$, ניתן לצאת ממנה להצגה פרמטרית של הישר $(3,5,-2)+t(2,-1,1)$, ע״י הוצאת המספרים החופשיים להיות נקודה שעל הישר, והוצאת t כגורם משותף, ואז מקדמיו בהתאמה יהיו הכיוון של הישר.

18. **בדיקה האם נקודה כלשהי נמצאת על הישר או שהיא חיצונית לישר** – מציגים את הישר כנקודה כללית (שלשה), משווים בין שיעורי הנקודה הנבדקת לבין שיעורי הנקודה הכללית וכך מקבלים 3 משוואות באמצעות משתנה יחיד (בד״כ t), ומכאן: יש לפתור את 3 המשוואות, אם נקבל ערך יחיד של t נאמר כי הנקודה על הישר ואם לא יש לומר שהנקודה חיצונית לישר.

19. **מציאת הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך שתי נקודות** – הצגתו הפרמטרית של הישר l_3 העובר דרך הנקודות $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ תהיה $l_3: \underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a})$

דוגמה: הישר l_3 עובר דרך $A(2,1,3)$ ו- $B(5,1,-2)$, הצגתו הפרמטרית תהיה $l_3: A+t(B-A)$, כלומר - $l_3: (2,1,3)+t(3,0,-5)$.

20. **הצגה פרמטרית של הצירים** – ציר x: $t(1,0,0)$

ציר y: $t(0,1,0)$

ציר z: $t(0,0,1)$

21. **בדיקה האם שלוש נקודות נמצאות על קו ישר אחד** – יהיו שלושה נקודות כל שהן A, B ו- C.

אם $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$, אז A, B ו- C על ישר אחד, אחרת אינם על ישר אחד.

הערה: אם שלוש נקודות על ישר אחד ניתן לקבוע איזו נקודה נמצאת בין השתיים האחרות עפ״י שיעורי הנקודות, שיעוריה של הנקודה הפנימית יהיו בהתאמה בין שיעוריהן של הנקודה החיצונית, למשל אם A בין B לבין C תמיד יתקיים $x_C<x_A<x_B$ או להפך $x_C<x_A<x_C$, כנ״ל לגבי y_A ו- z_A.

22. **הצגה קנונית של קו ישר** – נתבונן במשוואות הבאות $\frac{z-4}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{x-6}{2}$ המציגות קשרים ליניאריים בין x, y ו- z, צורה זו נקראת הצגה קנונית של ישר במרחב.

23. **מעבר מהצגה קנונית של קו ישר להצגתו הפרמטרית** – יש להשוות כל אחד מאגפי המשוואות

לפרמטר t, כך נקבל מהישר הר״מ שלוש משוואות: $\frac{(x-6)}{2}=t$ וכן $\frac{y+1}{3}=t$ וכן $\frac{z-4}{5}=t$,

מכאן: $x=2t+6$, $y=3t-1$ ו- $z=5t+4$.

קיבלנו את השלשה $(2t+6\,,3t-1\,,5t-4)$ שהיא הישר $l:(6,-1,4)+t(2,3,5)$.

24. מעבר מהצגה פרמטרית של הישר להצגתו הקנונית – נבחר ישר $l:(1,2,1)+t(-2,3,1)$

ונציגו כשלשה $(1-2t\,,2+3t\,,1+t)$, כלומר: $x=1-2t\Rightarrow\frac{x-1}{-2}=t$

$$y=2+3t\Rightarrow\frac{(y-2)}{3}=t$$

$$z=1+t\Rightarrow z-1=t$$

ולסיכום נאמר כי: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{3}=z-1$.

25. מציאת זוויות בין שני ישרים – זווית בין ישרים מוגדרת להיות הכלואה בין וקטורי הכיוון של הישרים, מוצאים אותה ע״י שימוש במשוואת המכפלה הסקלרית. נאמר כי הכיוון של l_1 הוא $\underline{a}$ והכיוון של l_2 הוא $\underline{b}$ והזווית שבין l_1 לבין l_2 היא α, הרי שמתקיים:

$\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$, כלומר: $\cos\alpha=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$.

הערות: (1) אם $\underline{a}\cdot\underline{b}=0$, אז: $\alpha=90^\circ$.

(2) אם $\underline{a}\cdot\underline{b}>0$, אז α זווית חדה.

(3) אם $\underline{a}\cdot\underline{b}<0$, אז α זווית קהה.

(4) אין זה משנה אם מצאנו זווית חדה בין ישרים או את הזווית הקהה הצמודה לה.

26. מציאת נקודת החיתוך בין שני ישרים – חיפוש נקודת חיתוך בין שני ישרים יתבצע כך:

(1) הצגת כל אחד משני הישרים כשלשה (נקודה כללית). בד״כ, ישר אחד יוצג כשלשה באמצעות הפרמטר t והישר השני באמצעות s.

$\downarrow$

(2) בניית מערכת של שלוש משוואות ושני משתנים ע״י השוואת שיעור ה- x של הישר האחד לשיעור ה- x של הישר השני, שיעור ה- y של האחד לשיעור ה- y של השני וכנ״ל לגבי שיעור ה- z של הישרים.

$\downarrow$

(3) פתרון מערכת המשוואות שהתקבלה: בוחרים את שתי המשוואות הנוחות יותר, ופותרים את מערכת המשוואות המורכבת מהשתיים הללו בשיטת ההצבה או בשיטת השוואת

המקדמים, בהתאם לצורת המשוואות.

(4) אפשרות 1:
אין למערכת של שתי המשוואות פתרון, ולכן נאמר שלישרים אין נקודת חיתוך, ברור מכאן שהישרים מקבילים או מצטלבים, אם כיוונם זהה הישרים מקבילים ואם כיוונם שונה הישרים מצטלבים.

אפשרות 2:
יש למערכת המשוואות המורכבת מהשתיים שבחרנו פתרון יחיד, למשל: $t = 1$, $s = 3$.
בשלב זה יש לבדוק האם הפתרון הנ"ל מקיים גם את המשוואה השלישית ע"י הצבת ערכי t ו- s שהתקבלו כפתרון במשוואה השלישית, זו שלא בחרנו.

(5) אפשרות 1:
התקבל פסוק אמת מהצבת ערכי t ו- s במשוואה ה- 3 נאמר כי הישרים נחתכים בנקודה אחת. כדי למצוא את הנקודה הנ"ל נציב את ערכו של t בישר שהוצג באמצעות t או את ערכו של s בישר שהוצג באמצעות s, בכל מקרה נקבל את אותה הנקודה.

אפשרות 2:
התקבל פסוק שקר מהצבת ערכי t ו- s במשוואה השלישית, נאמר כי הישרים לא נחתכים, אין נקודת חיתוך ולכן הישרים בהכרח מקבילים או מצטלבים (אם כיוונם זהה הם מקבילים ואם כוונם שונה הם מצטלבים).

27. ארבעה מצבים הדדים בין שני קווים ישרים – במרחב התלת מימדי ישנם ארבעה מצבים הדדים אפשריים בין כל שני ישרים, אלה הם:
(1) ישרים מתלכדים – כל נקודה על הישר האחד נמצאת גם על הישר השני, כך גם להפך.
(2) שני ישרים שכיוונם זהה ואין להם נקודה משותפת.
(3) ישרים נחתכים – שני ישרים שכיוונם שונה ויש להם בדיוק נקודה אחת משותפת.
(4) ישרים מצטלבים – שני ישרים שכיוונם שונה ואין להם נקודה משותפת.

28. מציאת המצב הדדי של שני ישרים – קביעת המצב הדדי בין שני ישרים תבוצע כך:

(1) נבחן את הכיוונים של שני הישרים, ייתכן שהכיוונים זהים וייתכן שהם שונים.

כיוונים זהים:

(2) אם לישרים יש כיוונים זהים נאמר שהישרים מקבילים או מתלכדים.

(3) כעת נבדוק האם נקודת המוצא של הישר האחד נמצאת על הישר השני (פעולה שלישית בעמוד 5)

(4) כן: אם נקודת המוצא של הישר האחד נמצאת על הישר השני נאמר ששני הישרים מתלכדים, כיוון שכיוונם זהה ויש להם נק' משותפת.

לא: אם נקודת המוצא של הישר האחד לא נמצאת על הישר השני נאמר ששני הישרים מקבילים, זאת כיוון שכיוונם זהה ואין להם נקודה משותפת.

כיוונים שונים:

אם לישרים יש כיוונים שונים נאמר שהישרים נחתכים או מצטלבים.

כעת נבדוק האם יש לישרים נקודת חיתוך (פעולה ראשונה בעמוד 7).

כן: אם יש לישרים נקודת חיתוך נאמר שהם נחתכים, כיוון שכיוונם שונה ויש להם נקודה משותפת אחת.

לא: אם אין לישרים נקודת חיתוך נאמר שהישרים מצטלבים, כיוון שכיוונם שונה ואין להם נקודה משותפת.

נסכם זאת בטבלה הבאה:

נק' משותפת \ כיוון	זהה	שונה
יש	מתלכדים	נחתכים
אין	מקבילים	מצטלבים

30. משוואה אלגברית של מישור – משוואה מהצורה $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ נקראת משוואה אלגברית של מישור.

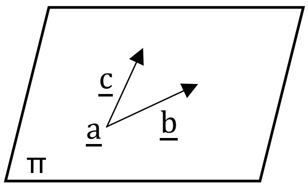
31. נורמל של מישור – הוקטור (A, B, C) מאונך למישור $Ax + By + Cz + D = 0$, וזהו "וקטור המקדמים" של המישור, נגדיר אותו להיות הנורמל של המישור.

32. ישר המאונך למישור – כל ישר שווקטור הכיוון שלו הוא (A, B, C) מאונך למישור שמשוואתו

$Ax + By + Cz + D = 0$.

33. מציאת משוואת מישור עפ״י וקטור שמאונך לו ונקודה שעליו – נאמר שהמישור π_1 מכיל את הנקודה $(2,1,3)$ ומאונך לוקטור $(1,-1,4)$. משוואת π_1 היא $x - y + 4z + D = 0$ כיוון שהווקטור $(1,-1,4)$ מאונך לו, וכעת כדי למצוא את D נציב את הנקודה $(2,1,3)$ במשוואת המישור, נקבל $2 - 1 + 12 + D = 0$, כלומר $D = -13$, ולכן נאמר שמשוואת המישור היא $x - y + 4z - 13 = 0$.

34. הצגה פרמטרית של מישור – מישור מתאפיין ע״י נקודה שעליו ושני כיוונים שונים המוכלים בו. נאמר שהמישור π מכיל את הנקודה $\underline{a}$ ואת שני הכיוונים $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ אשר שונים זה מזה, הצגתו הפרמטרית של π תהיה זו –



$\pi: \underline{a} + t \cdot \underline{b} + s \cdot \underline{c}$.

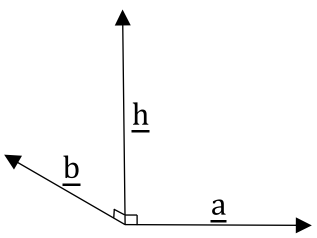
35. מציאת הצגה פרמטרית של מישור עפ״י שלוש נקודות שעליו –

יהיו A , B ו- C שלוש נקודות שאינן על ישר אחד המכילות במישור π, הצגתו הפרמטרית של המישור π תהיה – $\pi: A + t(B - A) + S(C - A)$, (t ו- s סקלרים).

<u>הערה</u>: ניתן לבחור כל נקודה שנרצה ״כנקודת מוצא״, כך גם ניתן למצוא כל שני כיוונים שנרצה וניצור מהנקודות A, B ו- C בתנאי שיהיו שונים זה מזה.

36. מכפלה וקטורית – יהיו שני וקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ היוצאים מאותה נקודה, המכפלה הווקטורית של $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ מסומנת ע״י - $\underline{axb}$ ותוצאתה תהיה הוקטור $\underline{h}$ המאונך גם לווקטור $\underline{a}$ וגם לוקטור $\underline{b}$, כלומר: $\underline{axb} = \underline{h}$,

אז: $\underline{a} \cdot \underline{h} = \underline{b} \cdot \underline{h} = 0$ $(\underline{b} \perp \underline{h}$ וגם $\underline{a} \perp \underline{h})$.



37. כיצד כופלים וקטורית בין שני וקטורים? – יהיו שני וקטורים $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ו- $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. המכפלה הוקטורית $\underline{u} \times \underline{v}$ מוגדרת כך:

$$\underline{u} \times \underline{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

הערות:

(1) כדאי לבצע את המכפלה הווקטורית בצורה אנכית ״בשיטה האצבעות״.

(2) תוצאה המכפלה הווקטורית הינה וקטור, ומכאן שמה כפי שתוצאת המכפלה הסקלרית

בין שני וקטורים הינה סקלר.

38. **מציאת משוואת מישור עפ"י שלוש נקודות שעליו** – מוצאים שני כיוונים שונים שעל המישור, מכפילים וקטורית בין שני הכיוונים הללו כדי לקבל את הנורמל (A, B, C) של המישור, וכעת מציבים את אחת הנקודות במשוואת המישור למציאת D.

39. **מעבר מהצגה פרמטרית של המישור למשוואה של מישור** – מכפלה וקטורית בין כיוונים של המישור תוביל למציאת הנורמל (A, B, C), את D נמצא ע"י הצבת נקודת המוצא במשוואה.

40. **מעבר ממשוואת מישור להצגתו הפרמטרית (לא שימושי)** – מוצאים שלוש נקודות שאינן על ישר אחד המקיימות את משוואת המישור, מכאן נמשיך כפי שהוסבר בסעיף 35.

41. **מציאת נקודות חיתוך של המישור עם** הצירים – למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה- x נציב $y = z = 0$ במשוואת המישור ונמצא את x, למציאת נקודת החיתוך עם ציר ה- z נציב $x = y = 0$ במשוואת המישור ונמצא את z. (במידה והמישור מוצג פרמטרית נעבירו תחילה למשוואה אלגברית, סעיף 39).

42. **מישורים מיוחדים** –

שם המישור	משוואת המישור
xy	$z = 0$
xz	$y = 0$
yz	$x = 0$

43. **מישור העובר דרך ראשית הצירים** – משוואתו מהצורה $Ax + By + Cz = 0$, כלומר: $D = 0$.

44. **מציאת משוואת מישור המכיל את l_1 ומקביל ל- l_2** – נציג את המישור פרמטרית ע"י נקודת המוצא של l_1 , כיוונו של l_1 וכיוונו של l_2 (נשים לב שהכיוונים שונים) ובכדי לעבור למשוואה אלגברית נקרא שוב את סעיף 39.

45. **מציאת משוואת מישור הנקבע ע"י שני ישרים נחתכים** – נציג את המישור פרמטרית ע"י נקודת המוצא של אחד הישרים ושני הכיוונים השונים של הישרים, נעביר זאת למשוואה אלגברית. כפי שהוסבר בסעיף 39.

46. **מציאת משוואת מישור הנקבע ע"י שני ישרים מקבילים** – נמצא תחילה את הכיוון הנוצר ע"י 2 נקודות המוצא של הישרים, יחד עם הכיוון הזהה של הישרים ונקודת המוצא של אחד הישרים נציג פרמטרית את המישור, המעבר למשוואה אלגברית הוסבר בסעיף 39.

47. **פרישת מישור ע"י שני ישרים** –

מצב הדדי בין שני ישרים	מספר המישורים המכילים את הישרים
מתלכדים	אין סוף
מקבילים	אחד
נחתכים	אחד

מצטלבים	אפס

48. מצב הדדי בין נקודה למישור – נציב את שיעורי הנקודה במשוואת המישור, קבלת פסוק אמת מלמדת שהנקודה על המישור, פסוק שקר מלמד שהנקודה חיצונית למישור (במידה והמישור מוצג פרמטרית נעבירו תחילה למשוואה אלגברית כפי שהוסבר בסעיף 39).

49. שלושה מצבים הדדים בין ישר ומישור – (א). מקבילים – אין נקודות משותפות.

(ב). נחתכים בנקודת חיתוך – נקודה משותפת אחת.

(ג). הישר מוכל במישור – כל נקודות הישר נמצאות על המישור.

50. מציאת המצב ההדדי בין ישר ומישור – נציג את הישר בצורת שלשה (נקודה כללית), נציב את הנקודה הכללית במשוואה האלגברית של המישור (במידה והמישור מוצג פרמטרית נעבירו למשוואה אלגברית כפי שהוסבר בסעיף 39), ונקבל משוואה פשוטה עם משתנה אחד (בדר"כ הסקלר t), ומכאן:

* אפשרות ראשונה – למשוואה אין פתרון ⇐ אין לישר ולמישור נקודה משותפת ⇐ הישר והמישור מקבילים זה לזה.
* אפשרות שנייה – למשוואה יש אין סוף פתרונות (מתקבל פסוק אמת) ⇐ כל נקודה שעל הישר מוכלת במישור ⇐ הישר מוכל במישור (המישור מכיל את הישר).
* אפשרות שלישית – למשוואה יש פתרון יחיד (נניח $t = 4$) ⇐ נציב $t = 4$ בנקודה הכללית שעל הישר ונמצא את נקודת החיתוך של הישר והמישור.

51. זווית בין ישר ומישור – יהי $\underline{a}$ כיוונו של הישר l_1 ו- $\underline{h}$ הנורמל של π_1, הזווית α הנמצאת בין l_1 לבין π_1 מוגדרת ע"י: $\sin\alpha = \left|\frac{\underline{a}\cdot\underline{h}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.

<u>הערות</u>:

(1) הערך המוחלט מבטיח שנקבל זווית חדה.

(2) במידה והמישור מוצג פרמטרית נמצא את $\underline{h}$ ע"י מכפלה וקטורית בין כיווניו.

52. מצב הדדי בין שני משורים – (א). מתלכדים – כל נקודה הנמצאת על המישור האחד נמצאת גם על המישור השני, וכל נקודה הנמצאת על המישור השני נמצאת גם על המישור הראשון.

(ב). מקבילים – אין נקודה משותפת.

(ג). נחתכים בישר חיתוך – אין סוף נקודות חיתוך (נקודות משותפות) הנמצאות כולן על קו ישר אחד.

53. מציאת המצב ההדדי בין שני מישורים – תחילה נוודא ששני המישורים מוצגים כמשוואה אלגברית, במידה ואחד מהם או שניהם מוצגים פרמטרית, נעביר זאת למשוואה אלגברית, כפי

שהוסבר כבר בסעיף 39, נניח כעת שמשוואת המישורים הן :

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

אם $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, אז המישורים מתלכדים זה עם זה,

אם $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, אז המישורים מקבילים זה לזה,

ואם המישורים לא מתלכדים ולא מקבילים, אז המישורים נחתכים בישר חיתוך.

הערה :

אם המישורים נחתכים בישר חיתוך אז הנורמלים שלהם אינם פרופורציוניים זה לזה.

54. זווית בין שני מישורים – יהיו שני מישורים כלשהם, π_1 שהנורמל שלו $\underline{h}_1$ ו- π_2 שהנורמל שלו $\underline{h}_2$, נאמר שהזווית בין π_1 לבין π_2 תהיה α ויודגש כי זווית זו מוגדרת להיות הזווית שבין $\underline{h}_1$ לבין $\underline{h}_2$, נמצא אותה ע"י שימוש בנוסחת המכפלה הסקלארית בין $\underline{h}_1$ לבין $\underline{h}_2$, כך :

$\cos\alpha = \left|\frac{\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|}\right|$. (הערך המוחלט מבטיח קבלת זווית חדה).

55. מישורים מאונכים – כל שני מישורים אשר הזווית בניהם ישרה נקראים מישורים מאונכים,

לשון אחר : יהיו שני מישורים : π_1 ו- π_2 אשר $\underline{h}_1$ ו- $\underline{h}_2$ הם הנורמלים שלהם בהתאמה,

אם $\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2 = 0$, אז $\underline{h}_1 \perp \underline{h}_2$ (גם להיפך).

56. מציאת ישר חיתוך של שני מישורים נחתכים – יהיו שני מישורים π_1 ו- π_2 שמשוואותיהם הן $x + 3y + z - 10 = 0$ ו- $\pi_2: 4x - 2y - 3z + 9 = 0$. כיוון שהנורמלים של המישורים אינם פרופורציוניים הרי שהם נחתכים ע"י ישר חיתוך, כדי למצוא את הצגתו הפרמטרית עלינו למצוא שלשה כלשהי (במונחי t) שהצבתה בשתי המשוואות של המישורים תוביל לפסוק אמת מהצורה $0 = 0$, שלשה זו הינה ישר החיתוך אותו אנו מחפשים (במידה והמישורים מוצגים פרמטרית נעבירם לצורת משוואה כפי שהוסבר בסעיף 39).

<u>כיצד עושים זאת?</u> - נתייחס לשתי המשוואות כאל מערכת של שתי משוואות ושלושה משתנים, "נבטל" את אחד המשתנים (בדוגמה שלנו נכפול את π_1 ב- 3 ונחבר במאונך, כך "נבטל" את z), מכאן נישאר עם משוואה אחת ושני משתנים (בדוגמא נישאר עם משוואה המקשרת בין x ל- y)., נסמן ע"י t את אחד המשתנים (נניח x) , נביע באמצעות t את המשתנה הנותר (y במקרה זה), וכעת משהבענו את x ו- y ע"י t נציבם באחת ממשוואות המישור

(נניח π_1) כדי למצוא את שיעורי z במונחי t. וכעת, כל שנותר הוא להפוך את הנקודה הכללית (x, y, z) שהובעה באמצעות t להיות הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של שני המישורים.

נשלים את מציאת ישר החיתוך בדוגמה שהובאה:

$$\begin{array}{l} \pi_1: 3x + 9y + 3z - 30 = 0 \\ + \\ \pi_2: 4x - 2y - 3z + 9 = 0 \\ \hline 7x + 7y - 21 = 0 \ / \div 7 \end{array}$$

$$x + y - 3 = 0$$

$$\boxed{x = t} \Rightarrow \boxed{y = 3 - t} \Rightarrow 3t + 9(3 - t) + 3z - 30 = 0$$

$$3t + 27 - 9t + 3z - 30 = 0$$

$$3z = 3 + 6t \ / \div 3$$

$$\boxed{z = 1 + 2t}$$

התקבלה השלשה הבאה: $(t, 3 - t, 1 + 2t)$, כלומר הישר: $l: (0,3,1) + t(1, -1, 2)$.

57. מרחקים – 7 סוגי מרחקים יש להכיר:

(1) מרחק בין 2 נקודות.

(2) מרחק נקודה ממישור (הנקודה החיצונית לישר).

(3) מרחק נקודה ממישור (הנקודה החיצונית למישור).

(4) מרחק בין שני ישרים מקבילים.

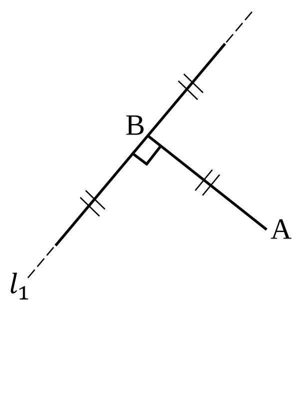
(5) מרחק בין ישרים מצטלבים.

(6) מרחק בין ישר ומישור (הישר מקביל למישור).

(7) מרחק בין מישורים מקבילים.

58. מרחק בין שתי נקודות – ראה סעיף 14 בעמוד 3.

59. מרחק נקודה מישר – יהיה l_1 קו ישר, ותהי A נקודה חיצונית לישר, ותהי B נקודה כללית על l_1 הקרובה ביותר לנקודה A, קרי הקטע AB מאונך ל- l_1. אורך הקטע AB, הינו המרחק בין A לבין l_1. בכדי למצוא את אורכו של AB נמצא תחילה את B, והמרחק בין A ל- B, יחושב כמרחק בין שתי נקודות (סעיף 14 עמוד 3).



כיצד נמצא את B?

נציג את B כ- "שלשה" , הרי B על l_1, נביע את הכיוון $\overrightarrow{AB}$ באמצעות t, נכפול סקלרית את הכיוון שמצאנו בכיוונו של l_1 ונשווה לאפס, כך נמצא את t עבורו $AB \perp l_1$, ובכך את B.

60. מרחק נקודה ממישור – המרחק בין הנקודה (x_1, y_1, z_1) למישור $Ax + By + Cz + D = 0$ יחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

61. מרחק בין ישרים מקבילים – בוחרים נקודה כלשהי על l_1 ומוצאים את מרחקה מ- l_2 כפי שהוסבר בסעיף 59.

62. מרחק בין ישרים מצטלבים – יהיו l_1 ו- l_2 ישרים מצטלבים, "נפרוש" מישור π_1, המכיל את l_1 ומקביל ל- l_2 , המרחק בין π_1 ל- l_2 הינו המרחק הנדרש.

63. מרחק בין ישר ומישור (מקבילים) – בוחרים נקודה כלשהי על הישר ומחשבים את מרחקה מהמישור ע"י הנוסחה מסעיף 60.

64. מרחק בין מישורים מקבילים – בוחרים נקודה על אחד המישורים, מוצאים את המרחק בינה לבין המישור האחר ע"י הנוסחה מסעיף 60.