דפי סיכום בנושא מספרים מרוכבים

הגדרת המספר i – i הוא השורש הריבועי של המספר -1 , כלומר $i^2 = -1$ ולכן $i = \sqrt{-1}$.

מספר מדומה – מספר מהצורה bi נקרא מספר מדומה (b מספר ממשי).

מספר מרוכב – מספר מהצורה $a + bi$ נקרא מספר מרוכב (a ו- b מספרים ממשים).

החלק הממשי – a נקרא החלק הממשי של המספר המרוכב $a + bi$.

החלק המדומה – bi נקרא החלק המדומה של המספר המרוכב $a + bi$.

הצגה קרטזית (אלגברית) – הצורה $a + bi$ נקראת אלגברית (קרטזית) של מספר מרוכב.

שוויון שני מספרים מרוכבים – $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ וגם $b = d$

חיבור מספרים מרוכבים – $a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$

חיסור מספרים מרוכבים – $a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i$

כפל מספרים מרוכבים – $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i$

חזקות גבוהות עם i – $i^{4n} = 1$, במילים: i בחזקת מספר המתחלק ב- 4 שווה 1.

$i^{4n+2} = -1$, במילים: i בחזקת מספר זוגי שלא מתחלק ב- 4 שווה -1.

<u>מסקנה</u>: i בחזקת מספר זוגי שווה ל- 1 או ל- (-1).

$i^{4n+1} = i$, במילים: i בחזקת מספר הגדול ב- 1 מכפולת 4 שווה i.

$i^{(4n+3)} = -i$, במילים: i בחזקת מספר גדול ב- 3 מכפולת 4 שווה $-i$.

<u>מסקנה</u>: i בחזקת מספר אי זוגי שווה ל- i או ל- $(-i)$.

סוג הסדרה	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
הגדרה	סדרה בעלת d קבוע (הפרש קבוע).	סדרה בעלת q קבוע (מנה קבועה).
מאפיין מרכזי	$d = a_{n+1} - a_n$	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
סדרה עולה	$d > 0$	$a_1 > 0$ וגם $q > 1$ או $a_1 < 0$ וגם $0 < q < 1$
סדרה קבועה	$d = 0$	$q = 1$
סדרה יורדת	$d < 0$	$a_1 > 0$ וגם $0 < q < 1$ או $a_1 < 0$ וגם $q > 1$
סדרה לא עולה ולא יורדת	$d = 0$	$q = 1$ או $q < 0$
נוסחת האיבר ה- n	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
נוסחת סכום n איברים	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$
ממוצע	$2b = a + c$	$b^2 = ac$
הערות מיוחדות	*d מייצג את ההפרש בין איבר בסדרה לבין האיבר שלפניו.	* q מייצג את המנה בין האיבר לזה שלפניו. * $a_n \neq 0$ לכל n וגם $q \neq 0$.

המספר הצמוד – המספר הצמוד למספר $z = a + bi$ הוא $\bar{z} = a - bi$.

חילוק מספרים מרוכבים – יש לכפול את המונה והמכנה במספר הצמוד של המספר שבמכנה.

הוצאת שורש ריבועי – כדי למצוא את השורש הריבועי של $-7 + 24i$ עלינו למצוא את a ו- b המקיימים

$\sqrt{-7 + 24i} = a + bi$, נעלה בריבוע ונקבל: $-7 + 24i = a^2 - b^2 + 2abi$.

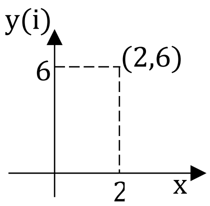
בשלב זה נבנה מערכת של שתי משוואות ושני משתנים a ו- b:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ 2ab = 24 \end{cases}$$

פתרון המערכת מוביל לכך ש- $a = \pm 3$ ואילו $b = \pm 4$, כלומר:

למספר המרוכב $-7 + 24i$ יש שני שורשים ריבועיים, האחד $3 + 4i$ והשני $-3 - 4i$,

נכתוב זאת כך: $\sqrt{-7 + 24i} = \pm(3 + 4i)$



מישור גאוס – מישור המספרים המרוכבים. ציר ה- x הוא הציר הממשי

וציר ה- y הוא הציר המדומה. נקודה במישור גאוס, למשל הנקודה (2,6)

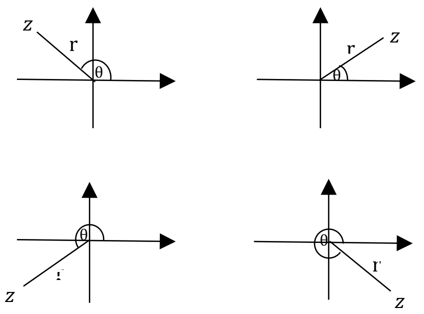
מייצגת את המספר המרוכב $z = 2 + 6i$.

ערך מוחלט של מספר מרוכב – מסומן ע"י $|z|$ או r, נקרא גם "גודלו של מספר מרוכב"

וגם "רדיוסו של מספר מרוכב" ומוגדר להיות: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, הוא המרחק בין הנקודה המתאימה

למספר המרוכב במישור גאוס לבין נקודת ראשית הצירים (0,0).

הארגומנט של מספר מרוכב – מסומן בדרך כלל ע"י האות θ או על ידי α (תֶטָא או אָלְפָא)



והוא הזווית הכלואה בין רדיוסו של המספר מרוכב

לבין הקרן החיובית של ציר ה- x מעל ציר ה- x.

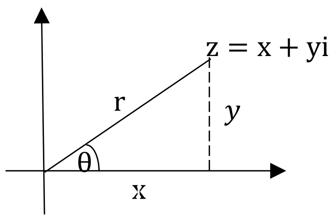
נשים לב: z ברביע ה- I $\Leftrightarrow 0° < \theta < 90°$,

z ברביע ה- II $\Leftrightarrow 90° < \theta < 180°$,

z ברביע ה- III $\Leftrightarrow 180° < \theta < 270°$,

z ברביע ה- IV $\Leftrightarrow 270° < \theta < 360°$.

קשרים בין $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{r}$ ו- $\boldsymbol{\theta}$:



* משפט פיתגורס: $x^2 + y^2 = r^2$

* הגדרת קוסינוס: $r \cdot \cos\theta = x$

* הגדרת סינוס: $r \cdot \sin\theta = y$

* הגדרת טנגנס: $\tan\theta = \frac{y}{x}$

הצגה קוטבית (טריגונומטרית) – המספר המרוכב $z = x + yi$ מוצג באופן אלגברי, נציב בו $x = r\cos\theta$

ו- $y = r\sin\theta$ ונקבל: $z = r\cos\theta + r\sin\theta i$, צורה זו של המספר המרוכב z נקראת הצגה קוטבית

(טריגונומטרית).

הערה: ניתן לכתוב בקיצור $z = r\text{cis}\theta$, יש לשים לב כי $\text{cis}\theta = \cos\theta + \sin\theta i$.

$\text{cis}\theta$ עבור ארגומנט מיוחד – $\text{cis}0° = 1\,,\ \text{cis}90° = i\,,\ \text{cis}180° = -1\,,\ \text{cis}270° = -i$

מעבר מהצגה טריגונומטרית להצגה אלגברית – $r\text{cis}\theta = x + yi \Rightarrow r\cos\theta = x\,,\ r\sin\theta = y$

מעבר מהצגה אלגברית להצגה טריגונומטרית – $x + yi = r\text{cis}\theta\,,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$

<u>הערה</u>: יש לוודא שהארגומנט ברביע המתאים, אם לא נתקנו ע"י הוספת $180°$.

מכפלת מספרים מרוכבים המוצגים טריגונומטרית – $r_1\text{cis}\theta_1 \cdot r_2\text{cis}\theta_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

מנת מספרים מרוכבים המוצגים טריגונומטרית – $\frac{r_1\text{cis}\theta_1}{r_2\text{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

משפט דה מואבר – $(r\text{cis}\theta)^n = r^n \cdot \text{cis}(n \cdot \theta)$

שורשי היחידה – הפתרון הכללי של המשוואה $z^n = 1$ הוא $z_k = \text{cis}\left(\frac{360°k}{n}\right)$ כאשר $k = 0,1,2\,\ldots, n-1$.

השורשים מסדר n של המספר מרוכב – הפתרון הכללי של המשוואה $z^n = r\text{cis}\theta$ הוא $z_k = \sqrt[n]{r}\text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360°k}{n}\right)$

כאשר $k = 0,1,2\,\ldots, n-1$.

<u>דוגמה</u>:

$$z^5 = 32\text{cis}100°$$

$$z_k = \sqrt[5]{32}\text{cis}\left(\frac{100°}{5} + \frac{360°k}{5}\right) = 2\text{cis}(20° + 72°k)$$

$$k = 0: z_1 = 2\text{cis}20°$$

$$k = 1: z_2 = 2\text{cis}92°$$

$$k = 2: z_3 = 2\text{cis}164°$$

$$k = 3: z_4 = 2\text{cis}236°$$

$$k = 4: z_5 = 2\text{cis}308°$$

מספר צמוד בהצגה קוטבית – המספר הצמוד של $r\text{cis}\theta$ הוא $r\text{cis}(-\theta)$.

נוסחאות וייטה – $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}\ ,\ \ z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

מקום גאומטרי – בשאלות המשלבות מקום גאומטרי עם מספרים מרוכבים נציב $z = x + yi$ "ונתקדם" עם התרגיל עד לקבלת המקום הגאומטרי המבוקש.