סדרות

סיכום, דגשים וטיפים

5 יחידות לימוד במתמטיקה – שאלון מספר 581, שאלה מספר 2

תוכן העניינים

פתח דבר

בחינות הבגרות במתמטיקה ברמת חמש יחידות לימוד כוללות שני שאלונים, האחד שאלון מספר 035581 והשני שאלון שמספרו 035582. השאלה השנייה בשאלון הראשון שמספרו 035581 עוסקת בסדרות. הקובץ שלפניך מכיל את הסיכום של כלל החומר התיאורטי הנדרש כדי להצליח לפתור את השאלות בנושא סדרות בבחינות הבגרות במתמטיקה ברמת חמש יחידות לימוד, בפרט את ההגדרות הנדרשות, את הנוסחאות הנדרשות, דגשים וטיפים חשובים להצלחתך וכן מספר דוגמאות במקומות בהם מצאנו לנכון.

מטרתו המרכזית של הקובץ הנ״ל היא לרכז תחת קורת גג אחת את כל המידע החיוני הקשור לסדרות לטובת בחינות הבגרות במתמטיקה ברמת חמש יחידות לימוד תוך הקפדה ברורה לא לצרף שאלות לתרגול ולחזרה שכן מהותו של הקובץ היא לסכם את נושא הסדרות תוך הוספת דגשים וטיפים חשובים.

תכני הקובץ נשענים בהקפדה יתרה על תוכנית הלימודים של משרד החינוך לטובת נבחני הבגרות ברמת חמש יחידות לימוד והוקפד לא לחרוג מכך, בפרט לנסח את תוכנו בטרמינולוגיה המקובלת במתמטיקה התיכונית במטרה לאפשר לקוראו להטמיע את המונחים החשובים, את הנוסחאות החיוניות ובכלל זה לרכוש את הכלים הדרושים לו להתמודד היטב עם השאלות בבחינות הבגרות הנ״ל.

בשל העובדה שהקובץ שלפניך מסכם, כאמור, את של אשר נדרש הקשור לסדרות לטובת בחינות הבגרות הללו נכון יהיה להגישו לתלמיד בתום הלימוד הכולל של סדרות במטרה לסייע לו לזכור את תוכנו של הקובץ. תוכנו לא נכתב במטרה להחליף את המורה המלמד בכיתה את תלמידיו אלא במטרה לסייע למורה ולתלמיד כאחד בהגשת תכניו.

תלמיד אשר יפתור שאלות בנושא סדרות תוך כדי התבוננות מתמדת בתכני הקובץ הנ״ל יפנים את תכניו בצורה טובה מאוד ויקל על עצמו במלאכת זכירת כלל התכנים הללו ובכך, מטבעו של דבר, ישפר את סיכוייו לפתור בהצלחה את השאלות העוסקות בסדרות בבחינות הבגרות ברמת חמש יחידות לימוד.

בברכה ובהצלחה,
צוות פלדמן דיגיטל
מבית אבירם פלדמן בגרות ופסיכומטרי

מבוא לסדרות

המילה סדרה מכילה בתוכה את המילה סדר. בניגוד לקבוצת איברים שבה אין חשיבות לסדר הופעת האיברים, בסדרה של איברים יש חשיבות לסדר הופעת האיברים. בכל סדרה שבה מספר סופי של איברים ישנו האיבר הראשון, ישנו האיבר השני, ישנו האיבר השלישי וכך הלאה עד לאיבר האחרון.

במרבית המקרים נעסוק בסדרות שבהן יש חוקיות מסוימת במעבר מאיבר לאיבר הבא אחריו, וחוקיות זו תסייע לנו פעמים רבות. יש לזכור כי סדר הופעת האיברים בכל סדרה הינו משמאל לימין.

נתבונן, למשל, בשלושת הסדרות הבאות:

1. $6, 13, 20, 27, 34, 41 \ldots$
2. $4, 8, 16, 32, 64, 128 \ldots$
3. $5, 7, 12, 19, 31, 50 \ldots$

בסדרה הראשונה האיבר הראשון הוא 6, האיבר השני הוא 13, האיבר השלישי הוא 20, האיבר הרביעי הוא 27, האיבר החמישי הוא 34, האיבר השישי הוא 41 ושלוש הנקודות מלמדות כי החוקיות נמשכת. בסדרה זו החוקיות היא כי כל איבר (פרט לאיבר הראשון) גדול מהאיבר שלפניו ב-7.

בסדרה השנייה האיבר הראשון הוא 4, האיבר השני הוא 8, האיבר השלישי הוא 16, האיבר הרביעי הוא 32, האיבר החמישי הוא 64, האיבר השישי הוא 128 ושלוש הנקודות מלמדות כי החוקיות נמשכת. בסדרה זו החוקיות היא כי כל איבר (פרט לאיבר הראשון) גדול מהאיבר שלפניו פי 2.

בסדרה השלישית האיבר הראשון הוא 5, האיבר השני הוא 7, האיבר השלישי הוא 12, האיבר הרביעי הוא 19, האיבר החמישי הוא 31, האיבר השישי הוא 50 ושלוש הנקודות, גם בסדרה זו, מלמדות כי החוקיות נמשכת. בסדרה זו כל איבר (פרט לשני האיברים הראשונים) שווה לסכום של שני האיברים שלפניו.

<u>סדרה סופית</u> – סדרה בה מספר האיברים הוא סופי.

<u>סדרה אין-סופית</u> – סדרה שאינה סופית, כלומר סדרה בה מספר האיברים אינו סופי.

<u>סימון איברים</u> – האיבר הראשון מסומן על-ידי a_1, האיבר השני מסומן על-ידי a_2, והאיבר השלישי מסומן על-ידי a_3 וכך הלאה. האיבר הכללי, לעתים רבות הוא מכונה גם האיבר הנמצא במקום ה-n, מסומן על-ידי a_n (אם בסדרה יש בדיוק n איברים אז האיבר האחרון בסדרה יסומן על-ידי a_n).

<u>אינדקס</u> – המיקום של כל איבר בסדרה מסומן בדרך-כלל על-ידי מספר או על-ידי אות, ונכתב מצד ימין בקטן לאות a המסמנת את האיבר, נקרא האינדקס של האיבר. דוגמה: האינדקס של a_{n+1} הוא $n+1$ והוא מסמן את המיקום של האיבר בסדרה. במקרה זה, a_n הוא האיבר הקודם לו ו-a_{n+2} הוא האיבר העוקב לו.

שימו לב: האינדקס של כל איבר בכל סדרה הינו מספר טבעי בהכרח (מספר טבעי הוא מספר שלם וחיובי).

מאפייני הסדרה והסימונים המקובלים

a_1 – האיבר הראשון / האיבר שהאינדקס שלו הוא 1 / האיבר שמיקומו הסידורי הוא 1.

n – מספר האיברים / האינדקס של איבר כללי / האינדקס של האיבר האחרון אם יש בסדרה n איברים (מספר האיברים בסדרה יכול להיות שונה מ- n).

a_n – האיבר הכללי / האיבר במקום ה- n / האיבר שהאינדקס שלו הוא n / האיבר האחרון אם יש בסדרה n איברים (האינדקס יכול להיות שונה מ- n).

s_n – הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה / הסכום של n איברים רצופים בסדרה.

הקשר בין a_n לבין s_n

ההפרש בין סכום n האיברים הראשונים בסדרה לבין n-1 האיברים הראשונים שווה לאיבר הנמצא במקום ה- n בסדרה, בשפה מתמטית: $s_n - s_{n-1} = a_n$ לכל n טבעי המקיים $n > 1$ (נוסחה זו אינה מופיעה בדפי הנוסחאות שיחולקו לכם בעת בחינות הבגרות ולכן עליכם לזכור אותה בעל-פה).

איבר אמצעי או שני איברים אמצעיים

1. אם מספר האיברים בסדרה הוא זוגי אז כדאי לסמן את מספר האיברים בסדרה על-ידי $2n$, ואז יש בסדרה זו שני איברים אמצעיים שמיקומם הסידורי הוא n ו- $n+1$.
2. אם מספר האיברים בסדרה הוא אי-זוגי אז כדאי לסמן את מספר האיברים בסדרה על-ידי $2n+1$, ואז יש בסדרה איבר אמצעי שמיקומו הסידורי הוא n.

סדרה חשבונית

<u>הגדרה מילולית של סדרה חשבונית</u> – סדרה בה ההפרש בין כל איבר (פרט לאיבר הראשון) לבין האיבר שלפניו הוא קבוע. הפרש הסדרה מסומן על-ידי d , האות הראשונה במילה difference שפירושה הפרש.

דוגמה מספר 1 : ... 2,5,8,11,14,17,20,23,26 (בדוגמה זו הפרש הסדרה הוא 3),

דוגמה מספר 2 : ... 50,45,40,35,30,25,20,15,10 (בדוגמה זו הפרש הסדרה הוא -5),

דוגמה מספר 3 : ... 7,7,7,7,7,7,7,7,7 (בדוגמה זו הפרש הסדרה הוא 0).

<u>הגדרה מתמטית של סדרה חשבונית</u> – סדרה בה $a_n - a_{n-1} = d$ לכל $n \geq 1$ כאשר n מספר טבעי.

<u>סדרה חשבונית עולה</u> – סדרה חשבונית בה כל איבר (פרט לאיבר הראשון) גדול מהאיבר שלפניו הינה סדרה חשבונית עולה. על-מנת להוכיח שסדרה חשבונית עולה נראה כי $d > 0$. דוגמה : בסדרה החשבונית העולה ... 2,5,8 ההפרש 3. שים לב : אם סדרה חשבונית עולה אז חלוקה ב- d, במשוואה, מותרת.

<u>סדרה חשבונית יורדת</u> - סדרה חשבונית שבה כל איבר (פרט לאיבר הראשון) קטן מהאיבר שלפניו נקראת סדרה חשבונית יורדת. על-מנת להוכיח כי סדרה חשבונית יורדת עלינו להראות כי $d < 0$. דוגמה : בסדרה החשבונית היורדת ... 11,8,5 ההפרש הוא -3. שים לב : אם סדרה חשבונית יורדת אז חלוקת שני אגפי משוואה כלשהי ב- d מותרת.

<u>סדרה חשבונית קבועה</u> – סדרה חשבונית שבה כל האיברים שווים נקראת סדרה חשבונית קבועה. סדרה זו אינה עולה ואינה יורדת. על-מנת להוכיח כי סדרה חשבונית קבועה עלינו להראות כי $d = 0$. דוגמה : בסדרה החשבונית הקבועה ... 7,7,7 ההפרש הוא 0. שים לב : אם סדרה חשבונית קבועה אז חלוקת שני אגפי משוואה כלשהי ב- d אינה מותרת.

<u>נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית</u> – לכל $n \geq 1$, מתקיים : $a_n = a_1 + (n-1)d$, מילולית : כל איבר בסדרה חשבונית שווה לאיבר הראשון ועוד הפרש הסדרה כפול מספר הקטן ב-1 מהאינדקס שלו (נוסחה זו מופיעה בדפי הנוסחאות שיחולקו לכם בעת בחינת הבגרות). נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית מופיעה בנוסחאון הבגרות.

מקרא :

a_1 = האיבר הראשון בסדרה

a_n = האיבר במקום ה־ n בסדרה / האיבר הכללי בסדרה / האיבר האחרון בסדרה

n = המיקום של האיבר הכללי בסדרה / המיקום של האיבר האחרון בסדרה

d = הפרש הסדרה

<u>שימושי נוסחת האיבר הכללי</u> – נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית כוללת את ארבעת המשתנים הבאים : איבר כלשהו, אינדקס האיבר, איבר ראשון והפרש הסדרה. להלן מצבי שימוש אפשריים לשימוש בנוסחה זו :

1. מציאת איבר בסדרה אם נתון איבר כלשהו ונתון הפרש הסדרה.

2. מציאת הפרש הסדרה אם נתונים שני איברים בסדרה.
3. מציאת האיבר הראשון אם נתון הפרש הסדרה, נתון מספר האיברים ונתון האיבר האחרון.
4. מציאת מיקומו הסידורי של איבר נתון אם נתון האיבר הראשון ונתון הפרש הסדרה.
5. מציאת מספר האיברים בסדרה אם נתון האיבר הראשון, נתון האיבר האחרון ונתון הפרש הסדרה.
6. קביעה האם איבר כלשהוא שייך לסדרה אם נתון האיבר הראשון ונתון ההפרש.
7. חיפוש איבר השווה למיקומו אם נתון האיבר הראשון ונתון ההפרש.
8. מציאת נוסחת a_n אם נתון האיבר הראשון והפרש הסדרה.
9. הוכחת סדרה חשבונית כאשר נתונה נוסחת a_n על-ידי הצבת $n+1$ בנוסחה, קבלת a_{n+1}, ומציאת ההפרש בין a_{n+1} לבין a_n תוך קבלת מספר חופשי שאינו תלוי ב-n.
10. מעבר מנוסחת a_n לכל נוסחת איבר כללי אחר על-ידי הצבה מתאימה במקום ה- n.

<u>הגדרת סדרה חשבונית על פי נוסחת האיבר הכללי (הנוסחה לפי מקום)</u>

אפשר שיבקשו מאיתנו בבחינת הבגרות להגדיר סדרה חשבונית קרי להציג סדרה חשבונית באמצעות נוסחת האיבר הכללי שלה. לשון אחר, נתבקש להציג סדרה חשבונית באמצעות הנוסחה לפי מקום. תשובה אפשרית לכך תהיה זו $a_n = 3n + 7$. על מנת להבין טוב יותר את מהות הכותרת הנ״ל נתבונן בשאלה הבאה, להלן:

נתונה הסדרה החשבונית הבאה: ... ,26,33,40 . הגדר את הסדרה החשבונית על פי הכלל לפי מקום.

פתרון:

האיבר הראשון של הסדרה החשבונית הנתונה הוא 26 והפרש הסדרה החשבונית הנתונה הוא 7 ולכן נציב $d = 7$ וגם $a_1 = 26$ בנוסחת האיבר הכללי של הסדרה החשבונית, הלא היא זו $a_n = a_1 + (n-1)d$, וכך נקבל:

$$a_n = 26 + (n-1)7 = 26 + 7n - 7 = 7n + 19$$

קיבלנו, אפוא, כי $a_n = 7n + 19$ ומשוואה זו היא בעצם הדרך להגדרת סדרה חשבונית על פי הכלל לפי מקום דהיינו להגדרת סדרה חשבונית באמצעות נוסחת האיבר הכללי שלה, מש״ל.

<u>הגדרת סדרה חשבונית על פי כלל נסיגה (נוסחת נסיגה)</u>

אפשר שיבקשו מאיתנו בבחינת הבגרות להגדיר סדרה חשבונית על ידי כל הנסיגה שלה דהיינו להציג סדרה חשבונית באמצעות נוסחת הנסיגה שלה. תשובה אפשרית לכך תיראה כך: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 5$. תשובה סופית נכונה חייבת לציין מפורשות את ערכו של האיבר הראשון בסדרה וכן להציג משוואה המקשרת בין a_{n+1} לבין a_n.

על מנת להבין טוב יותר את מהות הכותרת הנ״ל נתבונן בשאלה הבאה, להלן: נתונה הסדרה החשבונית הבאה: ... ,40,48,56 . הגדר את הסדרה החשבונית באמצעות כלל הנסיגה.

פתרון:

האיבר הראשון של הסדרה החשבונית הנתונה הוא 40 והפרש הסדרה החשבונית הנתונה הוא 8 ולכן כלל הנסיגה של הסדרה החשבונית הנ״ל ייראה כך: $a_1 = 40$, $a_{n+1} = a_n + 8$, מש״ל.

<u>הוכחת סדרה חשבונית</u> – במקרים רבים נתבקש להוכיח כי סדרה כלשהי היא סדרה חשבונית. על מנת להוכיח זאת עלינו להראות כי $a_n - a_{n-1} = n -$ *מספר חופשי שלא תלוי ב*. לשון אחר, על מנת להוכיח שסדרה כלשהי היא סדרה חשבונית עלינו להוכיח שההפרש בין האיבר במקום ה־ $n+1$ לבין האיבר במקום ה־ n הוא מספר חופשי שאינו תלוי ב־ n. בכתיב מתמטי נרצה להוכיח כי $a_{n+1} - a_n$ שווה למספר חופשי שאינו תלוי ב־ n. על מנת להבין טוב יותר כיצד להוכיח שסדרה כלשהי היא סדרה חשבונית נתבונן בשאלה הבאה, להלן:
נתונה סדרה על ידי הנוסחה הבאה $a_n = 5n + 13$. הוכח כי הסדרה חשבונית.

פתרון:

נציב $n+1$ במקום n בנוסחה הנתונה כדי לקבל את a_{n+1}, להלן:

$$a_{n+1} = 5(n+1) + 13 = 5n + 5 + 13 = 5n + 18$$

כעת נחסר את a_n מ־ a_{n+1}, להלן:

$$a_{n+1} - a_n = 5n + 18 - (5n + 13) = 5n + 18 - 5n - 13 = 18 - 13 = 5$$

מצאנו, אפוא, כי $a_{n+1} - a_n = 5$ ובכך הוכחנו שהסדרה הנתונה חשבונית והפרשה הוא 5.

<u>ממוצע חשבוני</u> – כל שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית, נסמנם על-ידי a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ובתנאי ש- $n \geq 2$, מקיימים את המשוואה הבאה: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, לשון אחר: כל איבר בסדרה חשבונית (פרט לאיבר הראשון ולאיבר האחרון) הוא הממוצע החשבוני של שני האיברים שלפניו. על מנת להקל עליכם במלאכת הזכירה, נהוג לומר כי אם a, b, c הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית, אז $2b = a + c$. (אפשר גם כך: אם x, y, z הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית, אז $2y = x + z$).

<u>בעיות מילוליות מציאותיות מחיי היום-יום</u> – לעתים שאלה העוסקת בסדרה חשבונית תוצג כשאלה מילולית, ותעסוק בנושא מציאותי מחיינו היומיומיים. נושאים מציאותיים, בין היתר, יכולים להיות שאלות תנועה, שאלות העוסקות בחלוקת פרסים בתחרות, שאלות העוסקות במשכורתו של עובד, שאלות העוסקות במספר מקומות הישיבה בשורות שונות בתיאטרון ובאופן זה, ניתן "לקשור" בין סדרה חשבונית לבין מצב מציאותי במקרים רבים. השאלות הללו צריכות להיפתר באמצעות "כלי-עבודה" של סדרה חשבונית (נוסחאות), ועל-פי רוב אלה הם שלבי העבודה:

1. הבנת הנקרא – קריאת השאלה והבנתה.
2. עריכת הנתונים – "תרגום" נתוני השאלה "לשפה" של סדרה חשבונית.
3. אלגברה – בניית משוואה ופתרונה או בניית מערכת משוואות ופתרונה.
4. תשובה סופית – ניסוח התשובה הסופית באופן מילולי.

נתבונן בדוגמה הבאה: באולם קולנוע חדש יש 50 שורות של כיסאות כך שבכל שורה יש 3 כיסאות יותר מאשר בשורה הקודמת לה. בשורה ה־ 26 יש 78 כיסאות. כמה כיסאות יש בשורה ה־ 43?

פתרון: מנתוני השאלה נובע כי מדובר בסדרה חשבונית בת 50 איברים שהפרשה הוא 3. עוד ידוע כי $a_{26} = 78$ ומבקשים מאיתנו למצוא את ערכו של a_{43}. כאמור, $a_{26} = 78$, דהיינו $a_1 + 25d = 78$, דהיינו $a_1 + 25 \cdot 3 = 78$, דהיינו $a_1 = 13$.

לפיכך, $a_{43} = a_1 + 42 \cdot d = 13 + 42 \cdot 3 = 13 + 126 = 139$, דהיינו $a_{43} = 139$, מש"ל.

<u>מספרים טבעיים</u> – לעתים שאלה העוסקת בסדרה חשבונית תדון בדבר מספרים המתחלקים במספרים טבעיים או לחילופין בשארית היכולה להתקבל בעת חלוקה במספרים טבעיים, כך למשל שאלה המבקשת למצוא את כמות המספרים התלת-ספרתיים הקטנים מ-650 המשאירים שארית 4 בעת חלוקתם ב-13. בשאלות מסוג זה עלינו "לבנות" סדרה חשבונית מתאימה, לזהות את האיבר הראשון, לזהות את הפרש הסדרה ובדרך-כלל לזהות גם את האיבר האחרון. במרבית השאלות השייכות לקטגוריה זו, יהיה די בכך כדי לומר כמה איברים כנ"ל קיימים. בשאלות העוסקות במספרים טבעיים הדורשות שימוש בכלים של סדרה חשבונית יש ליצור סדרה חשבונית רלוונטית, להגדיר מפורשות את הנתונים, לציין מה עלינו למצוא ולאחר מכן להשתמש בנוסחאות הסדרה החשבונית. אגב, מספר טבעי הוא מספר שלם וחיובי. להלן שאלה לדוגמה: כמה מספרים טבעיים דו ספרתיים מתחלקים ללא שארית ב־ 3 וגם ב־ 4 ?

פתרון:

המספר הדו ספרתי הראשון המתחלק ב־ 3 וגם ב־ 4 הוא 12 והמספר הדו ספרתי האחרון המתחלק ב־ 3 וגם ב־ 4 הוא 96. למעשה כך נראית סדרת המספרים הדו ספרתיים המתחלקים ב־ 3 וגם ב־ 4: $12,24,36,\ldots,96$ ונשאלת השאלה כמה מספרים כאלו קיימים.

בכלים של סדרה חשבונית נפתור זאת כך:

נתון כי $a_1 = 12, d = 12, a_n = 96$ ועלינו למצוא את n. נשתמש בנוסחת האיבר הכללי $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$96 = 12 + (n-1)12$, דהיינו $96 = 12 + 12n - 12$, דהיינו $96 = 12n$, דהיינו $n = 8$.

תשובה: קיימים 8 מספרים דו ספרתיים המתחלקים ב־ 3 וגם ב־ 4, מש"ל.

<u>איברים סמוכים</u> – לעתים שאלה העוסקת בסדרה חשבונית תדון בדבר מספר איברים העוקבים זה לזה. דוגמה אפשרית היא שאלה המבקשת למצוא שלושה איברים עוקבים בסדרה החשבונית $17, 29, 41, \ldots$ שסכומם 3183. בשאלות מסוג זה בדרך-כלל נבנה משוואה ונפתור אותה, משוואה זו תיבנה תוך התבססות על נוסחת האיבר הכללי. בדוגמה שהוצגה מעלה המשוואה תהיה זו: $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 3183$.

אם מדובר בשני איברים עוקבים הנמצאים במקומות זוגיים, או במקומות אי-זוגיים, אז נקפיד לעסוק ב a_n ו- a_{n+2}. דוגמה, אם נתבקש למצוא שני איברים עוקבים הנמצאים במקומות אי- זוגיים בסדרה החשבונית הנתונה מעלה אשר סכומם הוא 298, אז המשוואה שתיבנה תהיה $a_n + a_{n-2} = 298$.

<u>איברים חיוביים ואיברים שליליים</u> – לעתים שאלה העוסקת בסדרה חשבונית תחפש את האיבר החיובי (או את האיבר השלילי) הראשון (או את האחרון) בסדרה חשבונית נתונה. כמו-כן, ייתכן שהשאלה תחפש את הכמות של האיברים השליליים (או את הכמות של האיברים החיוביים) בסדרה החשבונית הנתונה. דוגמה אפשרית היא שאלה המבקשת למצוא את האיבר החיובי הראשון, ואת מיקומו, בסדרה החשבונית הבאה: $-243, -239, -235 \ldots$. שאלות מסוג זה ייפתרו בדרך-כלל על-ידי בניית אי-שוויון מתאים, במקרה זה $a_n > 0$. פתרון אי-השוויון יוביל אותנו, מן הסתם, לפתרון השאלה.

<u>סכום סדרה חשבונית</u> – הסכום של סדרה חשבונית מתקבל על-ידי מכפלת מחצית מספר האיברים בסדרה בסכום של האיבר הראשון ושל האיבר האחרון, בשפה מתמטית: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ (נוסחה זו מופיעה בדפי הנוסחאות שיחולקו לכם בעת בחינות הבגרות).

אם נציב בנוסחה זו את נוסחה האיבר הכללי, כלומר אם נציב בנוסחה זו $a_n = a_1 + (n-1)d$ אז נקבל כי

$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ (נוסחה זו אינה מופיעה בדפי הנוסחאות שיחולקו לכם בעת בחינות הבגרות אולם היא מופיעה בדף הנוסחאות המורחב שיחולק לאלה מכם הזכאים לכך).

אם נציב בנוסחה זו $a_1 = a_n - (n-1)d$ אז נקבל כי $s_n = \frac{n}{2}(2a_n - (n-1)d)$ (גם נוסחה זו אינה מופיעה בדפי הנוסחאות שיחולקו לכם בעת בחינות הבגרות אולם היא מופיעה בדף הנוסחאות המורחב שיחולק לאלה מכם הזכאים לכך).

<u>איברים במקומות הזוגיים ואיברים במקומות האי-זוגיים</u>

1. אם מספר האיברים בסדרה הוא זוגי אז הוא יסומן על-ידי $2n$, ואז יש בסדרה זו n איברים במקומות הזוגיים ו- n איברים במקומות האי-זוגיים.
   סכום האיברים במקומות האי-זוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה : $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)2d)$,
   וסכום האיברים במקומות הזוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה : $s_n = \frac{n}{2}(2a_2 + (n-1)2d)$.
2. אם מספר האיברים בסדרה הוא אי-זוגי אז הוא יסומן על-ידי $2n+1$, ואז יש בסדרה זו n איברים במקומות הזוגיים ו- $n+1$ איברים במקומות האי-זוגיים.
   סכום האיברים במקומות האי-זוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה : $s_{n+1} = \frac{n+1}{2}(2a_1 + (n)2d)$,
   וסכום האיברים במקומות הזוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה : $s_n = \frac{n}{2}(2a_2 + (n-1)2d)$.

<u>n האיברים האחרונים</u>

<u>מקרה ראשון – סדרה חשבונית בעלת $2n$ איברים</u> : סכום n האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה $s_n = \frac{n}{2}(a_{n+1} + a_{2n})$ (מכפלת מחצית ממספר האיברים בסכום האיבר הראשון והאיבר האחרון).

<u>מקרה שני – סדרה חשבונית בעלת $2n+1$ איברים</u> : סכום n האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה $s_n = \frac{n}{2}(a_{n+2} + a_{2n+1})$ (מכפלת מחצית ממספר האיברים בסכום האיבר הראשון והאיבר האחרון).

<u>מקרה שלישי – סדרה חשבונית בעלת $3n$ איברים</u> : סכום n האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה $s_n = \frac{n}{2}(a_{2n+1} + a_{3n})$ (מכפלת מחצית ממספר האיברים בסכום האיבר הראשון והאיבר האחרון).

<u>מקרה רביעי – סדרה חשבונית בעלת $\boldsymbol{n+1}$ איברים</u> : סכום **n** האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה $\boldsymbol{s_n = \frac{n}{2}(a_2 + a_{2n+1})}$ (מכפלת מחצית ממספר האיברים בסכום האיבר הראשון והאיבר האחרון).

סדרה הנדסית

הערה: הידע המקדים הנדרש הוא תשעה חוקי חזקות, הגדרת השורש ושני חוקי שורשים

חזקות

חזקה – הגדרה מילולית: כתיב מקוצר לתרגיל כפל ארוך. חזקה מורכבת מבסיס ומעריך כאשר המעריך קובע כמה פעמים יוכפל הבסיס בעצמו.

חזקה – הגדרה מתמטית $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

תשעת חוקי החזקות

מס״ד	כתיב מתמטי	הסבר מילולי	דוגמה
1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	מכפלת חזקות בעלות בסיס זהה ומעריך שונה – תתקבל חזקה בעלת אותו בסיס ומעריך השווה לסכום המעריכים	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$
2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	מנת חזקות בעלות בסיס זהה ומעריך שונה – תתקבל חזקה בעלת אותו בסיס ומעריך השווה להפרש בין המעריך העליון בין המעריך התחתון	$\frac{a^5}{a^{-2}} = a^{5-(-2)} = a^7$
3	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	מכפלת חזקות בעלות בסיס שונה ומעריך שווה – תתקבל חזקה שבסיסה הוא מכפלת הבסיסים, והמעריך שלה הוא אותו המעריך	$z^2 \cdot x^2 = (z \cdot x)^2$
4	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	מנת חזקות בעלות בסיס שונה ומעריך שווה – תתקבל חזקה שבסיסה הוא מנת הבסיסים, והמעריך שלה הוא אותו המעריך	$\frac{x^4}{a^4} = \left(\frac{x}{a}\right)^4$
5	$(a^n)^m = a^{nm}$	חזקה של חזקה – תתקבל חזקה בעלת אותו הבסיס, והמעריך יהיה שווה למכפלת המעריכים	$(x^2)^3 = x^{3 \cdot 2} = x^6$
6	$a^1 = a$	מעריך 1 – כל מספר בחזקת 1 שווה לעצמו	$5^1 = 5$
7	$a^0 = 1 \quad , a \neq 0$	מעריך 0 – כל מספר בחזקת 0, פרט ל-0, שווה ל-1	$5^0 = 1$
8	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	חזקה בעלת בסיס שלם ומעריך שלילי – תתקבל מנה מהצורה 1 לחלק לחזקה בעלת אותו הבסיס ומעריך נגדי	$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$
9	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	חזקה בעלת בסיס שבר ומעריך שלילי – תתקבל חזקה בעלת בסיס הופכי ומעריך נגדי	$\left(\frac{x}{b}\right)^{-4} = \left(\frac{b}{x}\right)^4$

שורשים

השורש מסדר $\boldsymbol{n}$ של $\boldsymbol{m}$ – הגדרה מילולית: פעולה הפוכה לפעולת החזקה. כך למשל, "השורש ה-3 של 8" שואל אתכם מהו המספר שאם תעלו אותו בחזקת 3 תקבלו 8. באופן כללי, "השורש מסדר $\boldsymbol{n}$ של $\boldsymbol{a^m}$ " שואל אתכם מהו המספר שאם תעלו אותו בחזקת $\boldsymbol{n}$ תקבלו $\boldsymbol{a^m}$.

השורש מסדר $\boldsymbol{n}$ של $\boldsymbol{m}$ – הגדרה מתמטית: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$

מס״ד	כתיב מתמטי	הסבר מילולי	דוגמה
1	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	מכפלת שורשים מאותו סדר – יתקבל שורש מסדר n של המכפלה $a \cdot b$	$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{x \cdot z}$
2	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	מנת שורשים מאותו סדר – יתקבל שורש מסדר n של המנה $\frac{a}{b}$	$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{z}} = \sqrt[4]{\frac{x}{z}}$

הגדרה מילולית של סדרה הנדסית – סדרה שבה היחס בין כל איבר (פרט לאיבר הראשון) לבין האיבר שלפניו היא גודל קבוע. יחס זה מכונה מנת הסדרה והיא מסומנת על-ידי האות q , האות הראשונה במילה quotient שפירושה הפרש.

הגדרה מתמטית של סדרה הנדסית – סדרה המקיימת $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ לכל $n \geq 1$ כאשר n מספר טבעי. שים לב: בסדרה הנדסית כל האיברים שונים מ- 0 וגם מנת הסדרה שונה מ- 0, ולכן מותר בפתרון משוואות (העוסקות בסדרה הנדסית) לחלק את שני אגפי המשוואה ב- q או באיבר מסוים.

סדרה הנדסית עולה – סדרה הנדסית שבה כל איבר (פרט לאיבר הראשון) גדול מהאיבר שלפניו נקראת סדרה הנדסית עולה. על-מנת להוכיח כי סדרה הנדסית עולה עלינו להראות את אחד מהשניים הבאים:

1. $q > 1$ וגם $a_1 > 0$, דוגמה: $2,6,12 \ldots\ldots$
2. $0 < q < 1$ וגם $a_1 < 0$, דוגמה: $-4,-2,-1 \ldots.$

סדרה הנדסית יורדת – סדרה הנדסית שבה כל איבר (פרט לאיבר הראשון) קטן מהאיבר שלפניו נקראת סדרה הנדסית יורדת. על-מנת להוכיח כי סדרה הנדסית יורדת עלינו להראות את אחד מהשניים הבאים:

3. $q > 1$ וגם $a_1 < 0$, דוגמה: $-2,-6,-12 \ldots\ldots$
4. $0 < q < 1$ וגם $a_1 > 0$, דוגמה: $4, 2, 1 \ldots.$

סדרה הנדסית קבועה – סדרה הנדסית שבה כל האיברים שווים נקראת סדרה הנדסית קבועה. סדרה זו אינה עולה ואינה יורדת. על-מנת להוכיח כי סדרה הנדסית קבועה עלינו להראות כי $q = 1$. דוגמה: בסדרה ההנדסית הקבועה ... 7,7,7 המנה היא 1.

<u>סדרה הנדסית שאינה עולה, אינה יורדת ואינה קבועה</u> – אם $q < 0$ אז כל שני איברים סמוכים בסדרה בעלי סימנים מנוגדים ולכן סדרה זו אינה עולה, אינה יורדת ואינה קבועה. דוגמה: $2, -4, 8, -16, 32 \ldots$

<u>הוכחת סדרה הנדסית</u> – במקרים רבים נתבקש להוכיח כי סדרה כלשהיא הינה סדרה הנדסית. על-מנת להוכיח זאת עלינו להראות כי $\frac{a_n}{a_{n-1}} = n - $ *מספר חופשי שלא תלוי ב.*

<u>נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית</u> – לכל $n \geq 1$, מתקיים: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, מילולית: כל איבר בסדרה הנדסית שווה לאיבר הראשון כפול מנת הסדרה החזקת מספר הקטן ב-1 מהאינדקס שלו (נוסחה זו מופיעה בדפי הנוסחאות שיחולקו לכם בעת בחינת הבגרות).

<u>שימושי נוסחת האיבר הכללי</u> – נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית כוללת את ארבעת המשתנים הבאים: איבר כלשהוא, אינדקס האיבר, איבר ראשון ומנת הסדרה. להלן מצבי שימוש אפשריים לשימוש בנוסחה זו:

1. מציאת איבר בסדרה אם נתון איבר כלשהוא ונתונה מנת הסדרה.
2. מציאת מנת הסדרה אם נתונים שני איברים בסדרה.
3. מציאת האיבר הראשון אם נתונה מנת הסדרה, נתון מספר האיברים ונתון האיבר האחרון.
4. מציאת מיקומו הסידורי של איבר נתון אם נתון האיבר הראשון ונתונה מנת הסדרה.
5. מציאת מספר האיברים בסדרה אם נתון האיבר הראשון, נתון האיבר האחרון ונתונה מנת הסדרה.
6. קביעה האם איבר כלשהוא שייך לסדרה אם נתון האיבר הראשון ונתונה המנה.
7. חיפוש איבר השווה למיקומו אם נתון האיבר הראשון ונתונה המנה.
8. מציאת נוסחת a_n אם נתון האיבר הראשון ונתונה מנת הסדרה.
9. הוכחת סדרה הנדסית כאשר נתונה נוסחת a_n על-ידי הצבת $n+1$ בנוסחה, קבלת a_{n+1}, ומציאת המנה בין a_{n+1} לבין a_n תוך קבלת מספר חופשי שאינו תלוי ב-n.
10. מעבר מנוסחת a_n לכל נוסחת איבר כללי אחר על-ידי הצבה מתאימה במקום ה- n.

<u>הגדרת סדרה הנדסית על פי נוסחת האיבר הכללי (הנוסחה לפי מקום)</u>

אפשר שיבקשו מאיתנו בבחינת הבגרות להגדיר סדרה הנדסית קרי להציג סדרה הנדסית באמצעות נוסחת האיבר הכללי שלה. לשון אחר, נתבקש להציג סדרה הנדסית באמצעות הנוסחה לפי מקום. תשובה אפשרית לכך תהיה זו $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. על מנת להבין טוב יותר את מהות הכותרת הנ״ל נתבונן בשאלה הבאה, להלן:

נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $10, 20, 40, \ldots$. הגדר את הסדרה ההנדסית על פי הכלל לפי מקום.

פתרון:

האיבר הראשון של הסדרה ההנדסית הנתונה הוא 10 ומנת הסדרה ההנדסית הנתונה הוא 2 ולכן נציב $q = 7$ וגם $a_1 = 10$ בנוסחת האיבר הכללי של הסדרה החשבונית, הלא היא זו $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, וכך נקבל: $a_n = 10 \cdot 2^{n-1}$

קיבלנו, אפוא, כי $a_n = 10 \cdot 2^{n-1}$ ומשוואה זו היא בעצם הדרך להגדרת סדרה הנדסית על פי הכלל לפי מקום דהיינו להגדרת סדרה הנדסית באמצעות נוסחת האיבר הכללי שלה, מש״ל.

<u>הגדרת סדרה הנדסית על פי כלל נסיגה (נוסחת נסיגה)</u>

אפשר שיבקשו מאיתנו בבחינת הבגרות להגדיר סדרה הנדסית על ידי כל הנסיגה שלה דהיינו להציג סדרה הנדסית באמצעות נוסחת הנסיגה שלה. תשובה אפשרית לכך תיראה כך: $a_{n+1} = a_n \cdot 5\,, a_1 = 4$. תשובה סופית נכונה חייבת לציין מפורשות את ערכו של האיבר הראשון בסדרה וכן להציג משוואה המקשרת בין a_{n+1} לבין a_n.

על מנת להבין טוב יותר את מהות הכותרת הנ"ל נתבונן בשאלה הבאה, להלן: נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $40,80,160, \ldots$. הגדר את הסדרה ההנדסית באמצעות כלל הנסיגה.

פתרון:

האיבר הראשון של הסדרה ההנדסית הנתונה הוא 40 ומנת הסדרה היא 2 ולכן כלל הנסיגה של הסדרה ההנדסית הנ"ל ייראה כך: $a_{n+1} = a_n \cdot 2, a_1 = 40$, מש"ל.

<u>ממוצע הנדסי</u> – כל שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית, נסמנם על-ידי $a_{n-1}\,, a_n\,, a_{n+1}$ ובתנאי ש- $n \geq 2$, מקיימים את המשוואה הבאה: $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = {a_n}^2$, לשון אחר: כל איבר בסדרה הנדסית (פרט לאיבר הראשון ולאיבר האחרון) הינו הממוצע ההנדסי של שני האיברים שלפניו. על-מנת להקל עליכם במלאכת הזכירה, נהוג לומר כי אם a, b, c הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית, אז $b^2 = a \cdot c$.

<u>בעיות מילוליות מציאותיות מחיי היום יום</u> – לעתים שאלה העוסקת בסדרה הנדסית תוצג כשאלה מילולית, ותעסוק בנושא מציאותי מחיינו היומיומיים. נושאים מציאותיים, בין היתר, יכולים להיות שאלות תנועה, שאלות העוסקות בחלוקת פרסים בתחרות, שאלות העוסקות במשכורתו של עובד, שאלות העוסקות במספר מקומות הישיבה בשורות שונות בתיאטרון ובאופן זה, ניתן "לקשור" בין סדרה הנדסית לבין מצב מציאותי במקרים רבים. השאלות הללו צריכות להיפתר באמצעות "כלי-עבודה" של סדרה הנדסית (נוסחאות), ועל-פי רוב אלה הם שלבי העבודה:

1. הבנת הנקרא – קריאת השאלה והבנתה.
2. עריכת הנתונים – "תרגום" נתוני השאלה "לשפה" של סדרה הנדסית.
3. אלגברה – בניית משוואה ופתרונה או בניית מערכת משוואות ופתרונה.
4. תשובה סופית – ניסוח התשובה הסופית באופן מילולי.

<u>איברים סמוכים</u> – לעתים שאלה העוסקת בסדרה הנדסית תדון בדבר מספר איברים העוקבים זה לזה. דוגמה אפשרית היא שאלה המבקשת למצוא שלושה איברים עוקבים בסדרה ההנדסית $2,4,8 \ldots$ שסכומם 384. בשאלות מסוג זה בדרך-כלל נבנה משוואה ונפתור אותה, משוואה זו תיבנה תוך התבססות על נוסחת האיבר הכללי. בדוגמה שהוצגה מעלה המשוואה תהיה זו: $a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} = 384$.

אם מדובר בשני איברים עוקבים הנמצאים במקומות זוגיים, או במקומות אי-זוגיים, אז נקפיד לעסוק ב a_n ו- a_{n+2} . דוגמה, אם נתבקש למצוא שני איברים עוקבים הנמצאים במקומות אי- זוגיים בסדרה ההנדסית הנתונה מעלה אשר סכומם הוא 2560, אז המשוואה שתיבנה תהיה . $a_n \cdot a_{n-2} = 298$

<u>סכום סדרה הנדסית</u> – הסכום של סדרה הנדסית מתקבל על ידי הנוסחה הבאה: $s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ (נוסחה זו מופיעה בדפי הנוסחאות שיחולקו לכם בעת בחינות הבגרות) או על ידי הנוסחה הבאה: $s_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$ (זו אינה מופיעה בנוסחאון הבגרות).

איברים במקומות הזוגיים ואיברים במקומות האי-זוגיים

1. אם מספר האיברים בסדרה הוא זוגי אז הוא יסומן על-ידי $2n$, ואז יש בסדרה זו n איברים במקומות הזוגיים ו- n איברים במקומות האי-זוגיים.

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה: $s_n = \frac{a_1((q^2)^n-1)}{q^2-1}$,

וסכום האיברים במקומות הזוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה: $s_n = \frac{a_2((q^2)^n-1)}{q^2-1}$.

2. אם מספר האיברים בסדרה הוא אי-זוגי אז הוא יסומן על-ידי $2n+1$, ואז יש בסדרה זו n איברים במקומות הזוגיים ו- $n+1$ איברים במקומות האי-זוגיים.

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה: $s_{n+1} = \frac{a_1((q^2)^{n+1}-1)}{q^2-1}$,

וסכום האיברים במקומות הזוגיים נתון על-ידי הנוסחה הבאה: $s_n = \frac{a_2((q^2)^n-1)}{q^2-1}$.

n האיברים האחרונים

מקרה ראשון – סדרה הנדסית בעלת $2n$ איברים: סכום n האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה. $s_n = \frac{a_{n+1}(q^n-1)}{q-1}$

מקרה שני – סדרה הנדסית בעלת $2n+1$ איברים: סכום n האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה. $s_n = \frac{a_{n+2}(q^n-1)}{q-1}$

מקרה שלישי – סדרה הנדסית בעלת $3n$ איברים: סכום n האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה. $s_n = \frac{a_{2n+1}(q^n-1)}{q-1}$

מקרה רביעי – סדרה הנדסית בעלת $n+1$ איברים: סכום n האיברים האחרונים נתון על-ידי הנוסחה הבאה $s_n = \frac{a_2(q^n-1)}{q-1}$

מציאת מספר האיברים בסדרה הנדסית – בשאלות בהן נידרש למצוא את מספר האיברים בסדרה הנדסית ייתכן שנגיע לידי משוואה מעריכית שבה המשתנה מצוי במעריך, כך למשל ייתכן שנגיע למשוואה הבאה: $2^n = 1024$, ואז נידרש לצמוא את n אשר נמצא במעריך. לצורך פתרון משוואה מעין זו עלינו לזכור כי אם: $a^x = b$, אז: $x = \frac{lnb}{lna}$. שים לב: השימוש ב ln במחשבון אפשרי כאשר a ו- b גדולים מ- 0.

סדרה הנדסית אין-סופית

תיתכן שאלה שתעסוק בסדרה הנדסית שבה מספר האיברים אינו סופי, סדרה הנדסית כזו מכונה סדרה הנדסית אין סופית. בסדרה הנדסית שבה המנה קטנה מ-1 וגדולה מ- -1 (להזכירכם מנת הסדרה שונה מ- 0 בסדרה הנדסית) , או בשפה מתמטית - בסדרה הנדסית אין-סופית בה $-1 < q < 1$ כאשר $q \neq 0$, חלה תופעה מתמטית המכונה התכנסות .

מספר האיברים בסדרה ההנדסית אינו סופי ולכן, לכאורה, קיים קושי לחשב את סכום הסדרה אלא שתחת התנאים הללו ניתן להבחין בכך שאם נחבר את איברי הסדרה, אם נחבר עוד ועוד איברים בסדרה וללא הפסקה, ניווכח כי הסכומים המתקבלים שואפים למספר קבוע כלשהו, למספר הזה קוראים במתמטיקה הגבול של הסדרה ההנדסית האין סופית. אנו נכנה את הגבול הנ״ל, תוך ביצוע ״חטא״ קל אך מקובל (במתמטיקה התיכונית) הסכום של הסדרה ההנדסית האין סופית המתכנסת.

הסכום של סדרה הנדסית אין סופית מתכנסת, אפוא, המקיימת $-1 < q < 1$ כאשר $q \neq 0$ הינו היחס בין האיבר הראשון בסדרה הנידונה לבין ההפרש בין 1 לבין מנת הסדרה הנידונה, ובשפה מתמטית פשוטה ; $S = \frac{a_1}{1-q}$, נוסחה זו נתונה בדפי הנוסחאות שתקבלו בעת בחינות הבגרות, ומכונה הנוסחה למציאת הסכום של סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת.

<u>הערות</u> :

1. המונה בנוסחה פירושו האיבר הראשון בסדרה הנידונה ואינו בהכרח a_1.
2. האות q במכנה מייצגת את מנת הסדרה הנידונה ואינה בהכרח q.
3. מימין מטה לאות S בנוסחת הסכום הנ״ל אין סימון למספר האיברים בסדרה מפני שאינו סופי.

<u>סדרות הנדסיות אין-סופיות מתכנסות – מקרים פרטיים</u>

הבה נתבונן בסדרה ההנדסית האין-סופית הבאה : $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ונניח כי היא מקיימת $-1 < q < 1$ כאשר $q \neq 0$, כעת נוודא כי אנו מבינים היטב את חמשת המקרים הפרטיים הבאים :

1. סכום הסדרה, אפוא, הינו $S = \frac{a_1}{1-q}$
2. סכום סדרת האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים הינו $S = \frac{a_1}{1-q^2}$
3. סכום סדרת האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הינו $S = \frac{a_2}{1-q^2}$
4. סכום הסדרה פרט לאיבר הראשון הינו $S = \frac{a_2}{1-q}$
5. סכום ריבועי איברי הסדרה הינו $S = \frac{a_1^2}{1-q^2}$

שים לב : באופן שתואר מעלה ניתן ליצור אין-סוף תתי סדרות לסדרה הנתונה, ולהציג את נוסחת הסכום של כל אחת מהן. אנו מסתפקים בחמש הדוגמאות הפרטיות הללו, חמישה מקרים פרטיים שכיחים למדי, ומקווים שהרעיון המרכזי הועבר בהצלחה באמצעותם.

הצגת סדרה על-ידי כלל נסיגה

שיטה להצגת סדרה, אינה בהכרח סדרה חשבונית ואינה בהכרח סדרה הנדסית, המאופיינת בהצגת אחד האיברים בסדרה (בדרך-כלל האיבר הראשון) וכן בנוסחה (משוואה) המקשרת בין שני איברים עוקבים בסדרה (בדרך –כלל נוסחה (משוואה) זו מוצגת כמשוואה המקשרת בין a_n לבין a_{n+1}).

<u>דוגמה מסי 1</u> :

כלל הנסיגה הבא $a_1 = 4 \, , \, a_{n+1} = a_n + 7$ מציג את סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא 4 וההפרש שלה הוא 7.

<u>דוגמה מסי 2</u> :

כלל הנסיגה הבא $a_1 = 4 \, , \, a_{n+1} = a_n \cdot 7$ מציג את סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 4 והמנה שלה היא 7.

<u>דוגמה מסי 3</u> :

כלל הנסיגה הבא $a_1 = 4 \, , \, a_{n+1} = a_n + n - 1$ מציג סדרה שהאיבר הראשן שלה הוא 4 שאינה סדרה חשבונית ואינה סדרה הנדסית. הצבת $n = 1$ תוביל למציאת האיבר השני ואז הצבת $n = 2$ תוביל למציאת האיבר השלישי ואז הצבת $n = 3$ תוביל למציאת האיבר הרביעי וכן הלאה.

הצגת סדרה על-ידי נוסחת האיבר הכללי

שיטה להצגת סדרה, אינה בהכרח סדרה חשבונית ואינה בהכרח סדרה הנדסית, המאופיינת בהצגת נוסחת האיבר הכללי של הסדרה. נוסחה זו, למעשה, הינה נוסחה למציאת איברי הסדרה בהתאם למיקום (לאינדקס) שלהם בסדרה.

<u>דוגמה</u> :

הנוסחה הבאה $a_n = n^2 + 3n - 5$ מציגה סדרה שבה כל איבר מתקבל על-ידי העלאת האינדקס שלו בריבוע, לכך נוסיף את מכפלת האינדקס של האיבר ב- 3 ומהתוצאה שתתקבל נחסר 5. לשון אחר, הצבת $n = 1$ בנוסחה תוביל למציאת האיבר הראשון, הצבת $n = 2$ תוביל למציאת האיבר השני, הצבת $n = 3$ תוביל למציאת האיבר השלישי וכן הלאה.