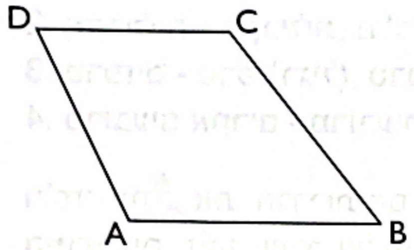
פרק שלישי: מרובעים



◈ **מרובע** - מצולע בעל ארבע צלעות, ארבע זוויות וארבעה קדקודים נקרא מרובע.

בשרטוט: צלעות המרובע הן- AB, BC, CD ו- AD.
קדקודי המרובע הם- A, B, C ו- D.
זוויות המרובע הן- ∢A, ∢B, ∢C ו- ∢D.

◈ **צלעות סמוכות** - כל שתי צלעות **שיש** להן קדקוד משותף נקראות צלעות סמוכות במרובע. בשרטוט למעלה: הקדקוד A משותף לצלעות AB ו- AD ולכן הן צלעות הסמוכות זו לזו.

◈ **צלעות נגדיות** - כל שתי צלעות **שאין** להן קדקוד משותף נקראות צלעות נגדיות במרובע. בשרטוט למעלה: AB ו- CD צלעות נגדיות, כך גם AD ו- BC.

◈ **זוויות סמוכות** - כל שתי זוויות המונחות על אותה צלע נקראות זוויות סמוכות במרובע. בשרטוט למעלה: ∢A ו- ∢B מונחות על הצלע AB ולכן הן זוויות הסמוכות זו לזו.

◈ **זוויות נגדיות** - כל שתי זוויות שאינן סמוכות נקראות זוויות נגדיות. בשרטוט למעלה: ∢A ו- ∢C הן זוויות נגדיות, כך גם ∢B ו- ∢D.

◈ **קדקודים סמוכים** - כל שני קדקודים המהווים קצות צלע של המרובע נקראים קדקודים סמוכים. בשרטוט למעלה: A ו- B קדקודים סמוכים כי הם קצות הצלע AB.

◈ **קדקודים נגדיים** - כל שני קדקודים במרובע שאינם סמוכים נקראים קדקודים נגדיים. בשרטוט למעלה: A ו- C קדקודים נגדיים, כך גם B ו- D.

◈ **אלכסון** - קטע שקצותיו הם שני קדקודים נגדיים במרובע נקרא אלכסון. בשרטוט למעלה: AC ו- BD הם שני האלכסונים במרובע ABCD.

◀**הערה:** בכל מרובע יש **שני** אלכסונים בלבד.

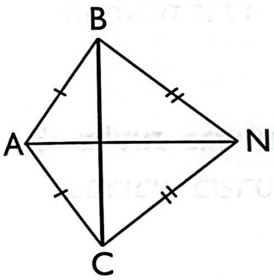
מיון המרובעים

ישנם עשרה מרובעים שונים בהנדסת המישור, נמיין אותם לארבע הקבוצות הבאות:

1. דלתונים - דלתון קמור, דלתון קעור.
2. מקביליות - מקבילית, מלבן, מעוין וריבוע.
3. טרפזים - טרפז(רגיל), טרפז ישר זווית וטרפז שווה שוקיים.
4. מרובעים אחרים - מרובעים שאינם דלתונים, אינם מקביליות ואינם טרפזים.

נלמד עתה את הגדרותיהם ותכונותיהם וכן משפטים הקשורים לכל אחד מעשרת המרובעים. זאת יעשה על פי סדר הופעתם המוצג לעיל.

1. דלתונים

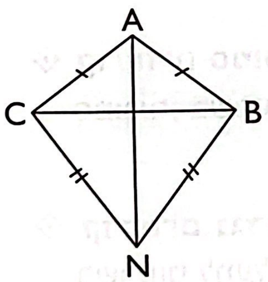


◈ **דלתון** - מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף נקרא דלתון.

לשון אחר: מרובע שבו שני זוגות נפרדים של צלעות סמוכות השוות זו לזו נקרא דלתון.

בשרטוט: הצלעות הסמוכות AB ו- AC במרובע ABNC שוות זו לזו, הצלעות הסמוכות BN ו- NC גם הן שוות זו לזו. כמו כן, הצלעות הסמוכות AB ו- BN שונות באורכן זו מזו, בהתקיים התנאים הללו נאמר כי המרובע ABNC הוא דלתון.

דלתון קמור



◈ **דלתון קמור** - מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף, כאשר **שני אלכסוניו נמצאים בתוכו**, נקרא דלתון קמור.

בשרטוט: CA=BA ,CN=BN, ולכן המרובע ABNC הוא דלתון קמור. BC הוא הבסיס המשותף של שני המשולשים שווי השוקיים ABC ו- NBC.

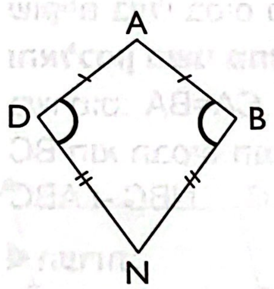
הזוויות A ו- N הן זוויות הראש של המשולשים שווי השוקיים CAB ו- BNC בהתאמה, שתי הזוויות הללו נקראות **זוויות הראש** של הדלתון. הזוויות B ו- C, שתי הזוויות שאינן זוויות

הראש של הדלתון נקראות **זוויות הבסיס** של הדלתון. האלכסון המחבר את קדקודי זוויות הראש של הדלתון, האלכסון NA שבשרטוט, נקרא **האלכסון הראשי** של הדלתון. ואילו האלכסון המחבר את קדקודי זוויות הבסיס של הדלתון, האלכסון BC שבשרטוט נקרא **האלכסון המשני** של הדלתון.

רשימת המשפטים הקשורים לדלתונים:

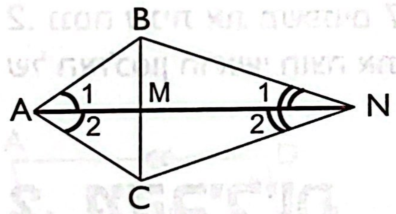
משפט 55: זוויות הבסיס של הדלתון שוות זו לזו.

בשרטוט: המרובע ABND הוא דלתון קמור (AB=AD ,NB=ND). הזוויות B ו- D שוות זו לזו.



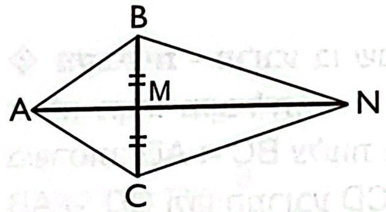
משפט 56: האלכסון הראשי בדלתון (קמור) חוצה את זוויות הראש.

בשרטוט: המרובע ABNC הוא דלתון קמור (AB=AC ,NB=NC). האלכסון הראשי AN חוצה את זוויות הראש של הדלתון, ולכן $\measuredangle N_1=\measuredangle N_2$, וכן $\measuredangle A_1=\measuredangle A_2$.



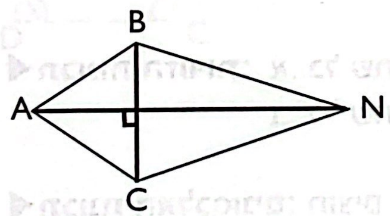
משפט 57: האלכסון הראשי בדלתון (קמור) חוצה את האלכסון המשני.

בשרטוט: המרובע ABNC הוא דלתון קמור (AB=AC ,NB=NC). האלכסון הראשי NA חוצה את האלכסון המשני BC, לכן BM=CM.



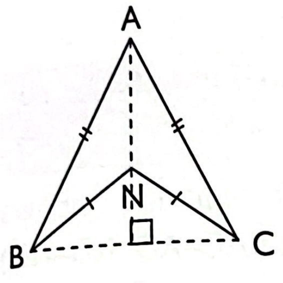
משפט 58: האלכסונים בדלתון (קמור) מאונכים זה לזה.

בשרטוט: המרובע ABNC הוא דלתון קמור (AB=AC ,NB=NC). האלכסון הראשי AN מאונך לאלכסון המשני BC.



◀**הערה:** ניתן לאחד את משפטים 56, 57 ו- 58 ולומר כי בדלתון קמור האלכסון הראשי חוצה את זוויות הראש, מאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו, אם כי כדאי מאוד להתייחס גם אל כל משפט בנפרד, בדרך כלל נוח יותר לפתור כך תרגילים.

דלתון קעור



◈ **דלתון קעור** - מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף, כאשר **אחד האלכסונים בתוכו, והאלכסון השני מחוצה לו** נקרא דלתון קעור.

בשרטוט: CA=BA, CN=BN, לכן המרובע ABNC דלתון.

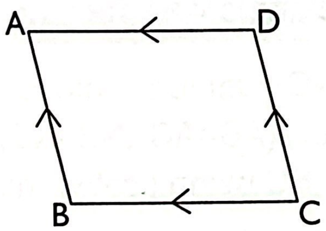
BC הוא הבסיס המשותף של שני המשולשים שווי השוקיים ABC ו- NBC.

◀**הערות:**

1. בדלתון קעור האלכסון המשני הוא הבסיס המשותף לשני המשולשים שווי השוקיים. כמו כן, נבחין בשרטוט מעלה כי האלכסון המשני נמצא **מחוצה לו.**
2. ננסח שנית את משפטים 57 ו- 58: בדלתון קעור **המשכו** של האלכסון הראשי חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

2. מקביליות

מקבילית



◈ **מקבילית** - מרובע בו שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות זו לזו נקרא מקבילית.

בשרטוט: AD ו- BC צלעות נגדיות המקבילות זו לזו, כך גם AB ו- CD ולכן המרובע ABCD הוא מקבילית.

◀**תכונות הצלעות:** א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
ב. כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

◀**תכונות הזוויות:** א. כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
ב. כל שתי זוויות סמוכות משלימות זו את זו ל-180°.

◀**תכונת האלכסונים:** חוצים זה את זה.

◀**חמש דרכים להוכיח כי מרובע הוא מקבילית:**

א. מרובע בו שני זוגות צלעות נגדיות המקבילות זו לזו הוא מקבילית.

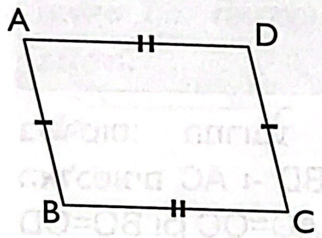
ב. מרובע בו שני זוגות צלעות נגדיות השוות זו לזו הוא מקבילית.

ג. מרובע בו זוג אחד של צלעות נגדיות המקבילות ושוות זו לזו הוא מקבילית.

ד. מרובע בו שני זוגות זוויות נגדיות השוות זו לזו הוא מקבילית.

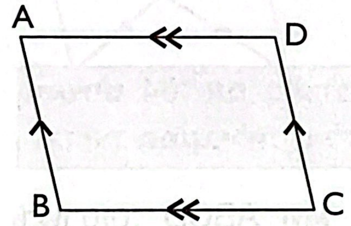
ה. מרובע בו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.

רשימת המשפטים הקשורים למקבילית:



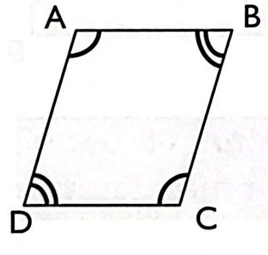
משפט 59: כל שתי צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.

בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית, לכן DC=AB, וכן BC=AD.



משפט 60: כל שתי צלעות נגדיות במקבילית מקבילות זו לזו.

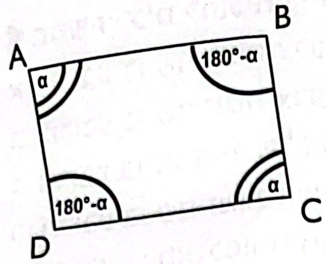
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית, לכן AB||DC, וכן AD||BC.



משפט 61: כל שתי זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.

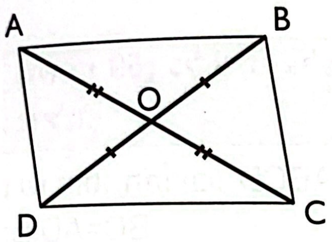
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית, לכן $\measuredangle B = \measuredangle D$, וכן $\measuredangle C = \measuredangle A$.

משפט 62: כל שתי זוויות סמוכות במקבילית משלימות זו את זו ל-180°.



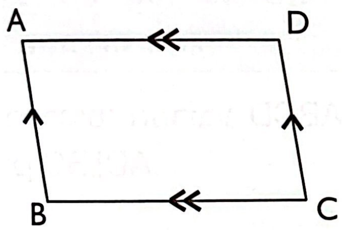
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית, ולכן כל שתי זוויות סמוכות משלימות זו את זו ל-180°, כלומר $\measuredangle A+\measuredangle B=180°$, $\measuredangle B+\measuredangle C=180°$, $\measuredangle C+\measuredangle D=180°$ וכן $\measuredangle D+\measuredangle A=180°$.

משפט 63: האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.



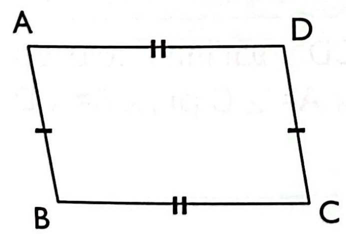
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית. האלכסונים AC ו- BD חוצים זה את זה, כלומר: BO=OD וכן AO=OC.

משפט 64: אם במרובע יש שני זוגות צלעות נגדיות המקבילות זו לזו אז הוא מקבילית.

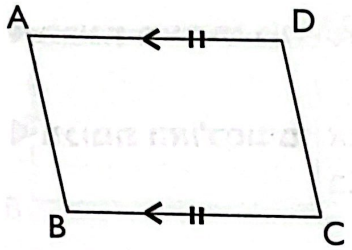


בשרטוט: ABCD הוא מרובע ובו AB∥DC וכן AD∥BC. כיוון שכך, המרובע הוא מקבילית.

משפט 65: אם במרובע יש שני זוגות צלעות נגדיות השוות זו לזו אז הוא מקבילית.



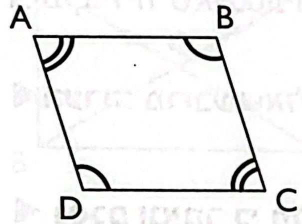
בשרטוט: ABCD הוא מרובע ובו BC=AD וכן AB=DC. כיוון שכך, המרובע הוא מקבילית.



משפט 66: אם במרובע יש זוג אחד של צלעות נגדיות השוות ומקבילות זו לזו, אז הוא מקבילית.

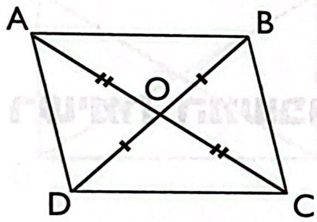
בשרטוט: ABCD הוא מרובע ובו BC=AD וכן BC||AD. כיוון שכך, המרובע הוא מקבילית.

◀*הערה: הוכחת המשפט בעמוד 124.*



משפט 67: אם במרובע יש שני זוגות זוויות נגדיות השוות זו לזו אז הוא מקבילית.

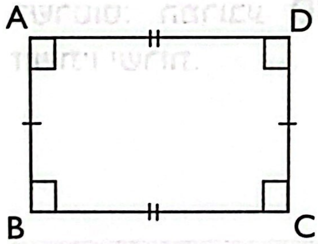
בשרטוט: ABCD הוא מרובע ובו $\measuredangle B=\measuredangle D$, וכן $\measuredangle A=\measuredangle C$. כיוון שכך, המרובע הוא מקבילית.



משפט 68: אם במרובע האלכסונים חוצים זה את זה אז הוא מקבילית.

בשרטוט: ABCD הוא מרובע ובו OB=OD וכן OA=OC. כיוון שכך, המרובע הוא מקבילית.

מלבן



◇ **מלבן** – מקבילית בעלת זווית אחת ישרה נקראת מלבן. מתכונות המקבילית ברור כי אם יש בה זווית אחת ישרה אז כל זוויתיה ישרות, מכאן ניתן להגדיר מלבן גם כך: מרובע שכל זוויותיו ישרות נקרא מלבן.

◀**הערה:** יש להתייחס למלבן כמקבילית **מיוחדת**, נאמר כי המלבן הוא מקבילית ישרת זווית.

◀**תכונות הצלעות:** א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו (הרי המלבן הוא מקבילית).
ב. כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו (הרי המלבן הוא מקבילית).
ג. כל שתי צלעות סמוכות מאונכות זו לזו.

◀**תכונת הזוויות:** כולן ישרות (בנות $90°$).

◀**תכונות האלכסונים:** א. חוצים זה את זה.
ב. שווים זה לזה.

◀**שלוש דרכים להוכיח כי מרובע הוא מלבן:**
א. מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן.
ב. מקבילית בעלת זווית אחת ישרה היא מלבן (הרי המלבן הוא מקבילית).
ג. מקבילית שאלכסוניה שווים זה לזה היא מלבן.

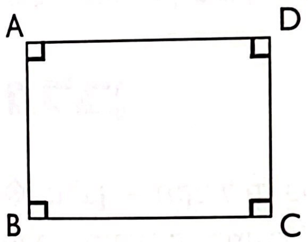
◀**הערה:** מרובע שאלכסוניו שווים זה לזה אינו בהכרח מלבן.

◀ **נסכם ונאמר כי מלבן הוא מקבילית בעלת שתי תכונות נוספות:**
א. כל זוויותיה ישרות.
ב. אלכסוניה שווים זה לזה.

רשימת המשפטים הקשורים למלבן:

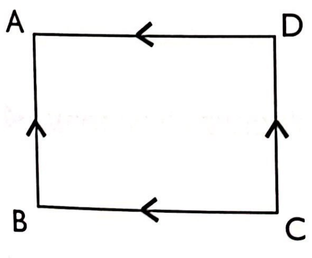
משפט 69: כל הזוויות במלבן ישרות.

בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, ולכן כל זוויותיו ישרות.

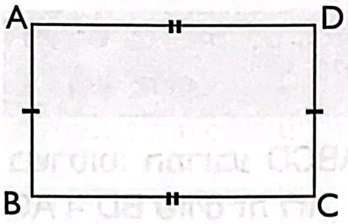


משפט 70: כל שתי צלעות נגדיות במלבן מקבילות זו לזו.

בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, ולכן $AB \parallel DC$, וכן $AD \parallel BC$.

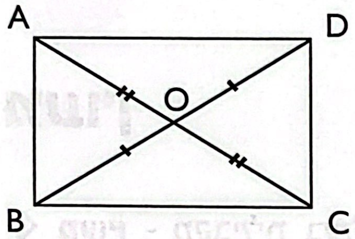


משפט 71: כל שתי צלעות נגדיות במלבן שוות זו לזו.



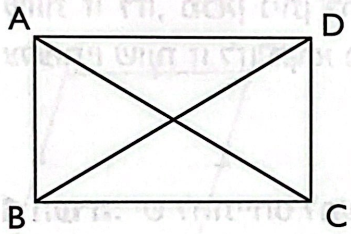
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, לכן DC=AB, וכן BC=AD.

משפט 72: האלכסונים במלבן חוצים זה את זה.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, ולכן AO=OC, וכן BO=OD.

משפט 73: האלכסונים במלבן שווים זה לזה.

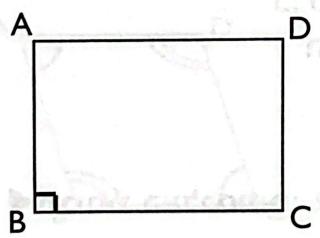


בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, ולכן AC=BD.

◀הערה: הוכחת המשפט בעמוד 125.

◀**מסקנה ממשפטים 72 ו-73:** כיוון שאלכסוני המלבן חוצים זה את זה ושווים זה לזה ניתן לומר כי נקודת המפגש של אלכסוני המלבן יוצרת ארבעה חצאי אלכסונים השווים זה לזה, בשרטוט משפט 72 מתקיים: OA=OB=OC=OD.

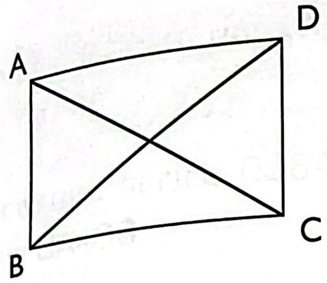
משפט 74: אם במקבילית יש זווית אחת ישרה אז היא מלבן.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית ובו הזווית B ישרה, לכן המרובע הוא מלבן.

◀**הערה:** המלבן הינו מקבילית **מיוחדת**, נוח לזכור כי מלבן הוא למעשה מקבילית ישרת זווית, כפי שנכתב בהערה הסמוכה להגדרת המלבן.

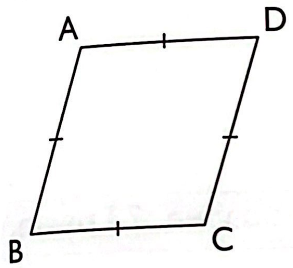
משפט 75: אם במקבילית האלכסונים שווים זה לזה אז היא מלבן.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית ובו האלכסונים AC ו- BD שווים זה לזה, לכן המרובע הוא מלבן.

◀**הערה:** המלבן הינו מקבילית **מיוחדת**, נוח לזכור כי מלבן הוא למעשה מקבילית שוות אלכסונים.

מעוין



◈ **מעוין** - מקבילית בעלת זוג אחד של צלעות סמוכות השוות זו לזו נקראת מעוין. מתכונות המקבילית ברור כי אם זוג אחד של צלעות סמוכות שוות זו לזו אז כל הצלעות שוות זו לזו, מכאן ניתן להגדיר מעוין גם כך: מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו נקרא מעוין.

◀**הערה:** יש להתייחס למעוין כמקבילית **מיוחדת**, נאמר כי מקבילית שוות צלעות היא מעוין.

◀**תכונות הצלעות:** א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
ב. כל הצלעות שוות זו לזו.

◀**תכונות הזוויות:** א. כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו (הרי המעוין הוא מקבילית).
ב. כל שתי זוויות סמוכות משלימות זו את זו ל-180° (הרי המעוין הוא מקבילית).

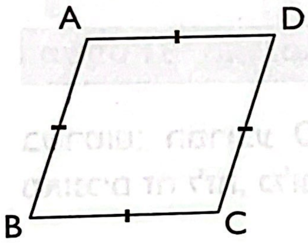
◀**תכונות האלכסונים:** א. חוצים זה את זה (הרי המעוין הוא מקבילית).
ב. חוצים את זוויות המעוין.
ג. מאונכים זה לזה.

◀ **ארבע דרכים להוכיח כי מרובע הוא מעוין:**
א. מקבילית בעלת זוג אחד של צלעות סמוכות השוות זו לזו היא מעוין.
ב. מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה היא מעוין.
ג. מקבילית שבה אחד האלכסונים חוצה את זוויותיה היא מעוין.
ד. מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו הוא מעוין.

◀ **נסכם ונאמר כי מעוין הוא מקבילית בעלת שלוש תכונות נוספות:**
א. כל צלעותיה שוות זו לזו.
ב. אלכסוניה מאונכים זה לזה.
ג. אלכסוניה חוצים את זוויותיה.

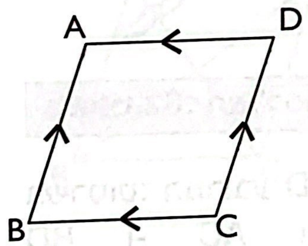
רשימת המשפטים הקשורים למעוין:

משפט 76: כל הצלעות במעוין שוות זו לזו.



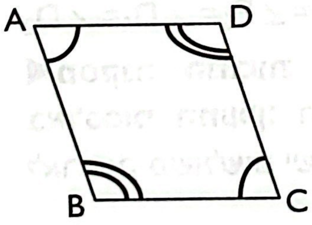
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, ולכן כל צלעותיו שוות זו לזו, כלומר AB=BC=CD=DA.

משפט 77: כל שתי צלעות נגדיות במעוין מקבילות זו לזו.



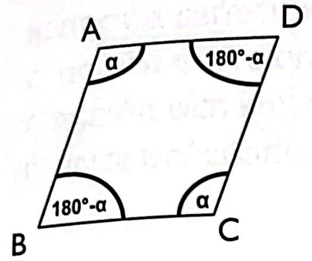
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, לכן AB∥DC, וכן BC∥AD.

משפט 78: כל שתי זוויות נגדיות במעוין שוות זו לזו.



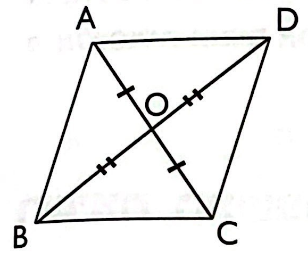
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, לכן $\measuredangle B=\measuredangle D$, וכן $\measuredangle A=\measuredangle C$.

משפט 79: כל שתי זוויות סמוכות במעוין משלימות זו את זו ל- °180.



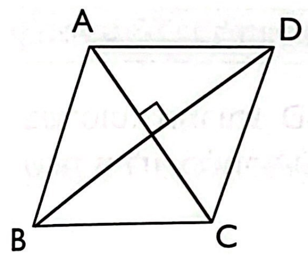
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, ולכן כל שתי זוויות סמוכות משלימות זו את זו ל-°180, כלומר:
$\measuredangle A+\measuredangle B=180^\circ$, $\measuredangle B+\measuredangle C=180^\circ$,
$\measuredangle C+\measuredangle D=180^\circ$ וכן $\measuredangle D+\measuredangle A=180^\circ$.

משפט 80: האלכסונים במעוין חוצים זה את זה.



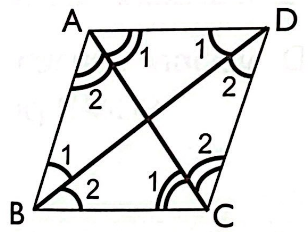
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, ולכן אלכסוניו חוצים זה את זה, כלומר OA=OC, וכן OB=OD.

משפט 81: האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, ולכן אלכסוניו מאונכים זה לזה, כלומר הזווית הכלואה ביניהם ישרה.

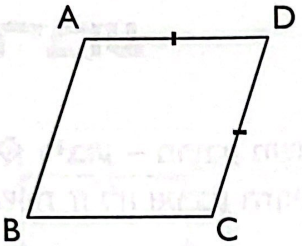
משפט 82: האלכסונים במעוין חוצים את זוויותיו.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, ולכן האלכסונים BD ו- AC חוצים את זוויותיו, כלומר:
$\measuredangle A_1=\measuredangle A_2=\measuredangle C_1=\measuredangle C_2$ וכן
$\measuredangle B_1=\measuredangle B_2=\measuredangle D_1=\measuredangle D_2$.

◄**מסקנה הנובעת מהמשפטים 80-82 העוסקים באלכסוני המעוין:** האלכסונים במעוין מחלקים אותו לארבעה משולשים ישרי זווית החופפים זה לזה.

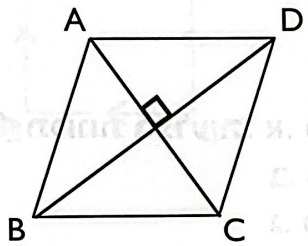
משפט 83: אם במקבילית זוג אחד של צלעות סמוכות שוות זו לזו אז היא מעוין.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית, הצלעות הסמוכות CD ו- AD שוות זו לזו ולכן הוא מעוין.

◀**הערה:** המעוין הינו מקבילית **מיוחדת**, נוח לזכור כי מעוין הוא למעשה מקבילית שוות צלעות, כפי שנכתב בהערה הסמוכה להגדרת המעוין.

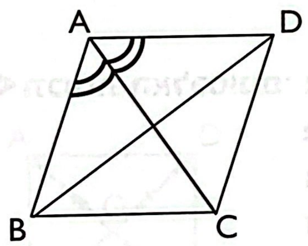
משפט 84: אם במקבילית האלכסונים מאונכים זה לזה אז היא מעוין.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית ובו האלכסונים BD ו- AC מאונכים זה לזה, ולכן הוא מעוין. כך נוח לזכור כי מעוין הינו מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה.

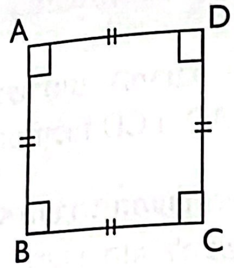
◀הערה: הוכחת המשפט בעמוד 126.

משפט 85: אם במקבילית אחד האלכסונים חוצה את זוויותיה אז היא מעוין.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מקבילית, AC חוצה את $\measuredangle A$, ולכן הוא מעוין.

ריבוע



◈ **ריבוע** – מרובע משוכלל. (במרובע משוכלל, ארבע הצלעות שוות זו לזו וארבע הזוויות ישרות.)

◀**הערה:** יש להתייחס לריבוע כמלבן **מיוחד**. נאמר כי הריבוע הוא מלבן שווה צלעות. כמו כן, ניתן להתייחס לריבוע כאל מעוין מיוחד, נאמר כי מעוין ישר זווית הוא ריבוע.

◀**תכונות הצלעות:** א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו (הרי ריבוע הוא מקבילית).
ב. כל שתי צלעות סמוכות מאונכות זו לזו (הרי ריבוע הוא מלבן).
ג. כל הצלעות שוות זו לזו (הרי ריבוע הוא מעוין).

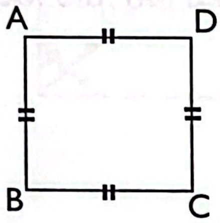
◀**תכונת הזוויות:** כולן ישרות (בנות $90°$).

◀**תכונות האלכסונים:** א. חוצים זה את זה (הרי הריבוע הוא מקבילית).
ב. שווים זה לזה (הרי הריבוע הוא מלבן).
ג. מאונכים זה לזה (הרי הריבוע הוא מעוין).
ד. חוצים את זוויות הריבוע (הרי הריבוע הוא מעוין).

◀**חמש דרכים להוכיח כי המרובע הוא ריבוע:**
א. מלבן שאלכסוניו מאונכים זה לזה הוא ריבוע.
ב. מלבן שבו אחד מאלכסוניו חוצה את זוויותיו הוא ריבוע.
ג. מלבן בעל זוג אחד של צלעות סמוכות השוות זו לזו הוא ריבוע.
ד. מעוין בעל זווית אחת ישרה הוא ריבוע.
ה. מעוין שאלכסוניו שווים זה לזה הוא ריבוע.

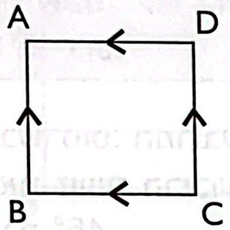
רשימת המשפטים הקשורים לריבוע:

משפט 86: כל הצלעות בריבוע שוות זו לזו.



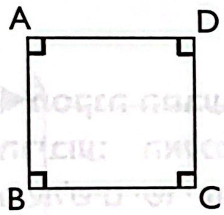
בשרטוט: המרובע ABCD הוא ריבוע, ולכן כל צלעותיו שוות זו לזו, כלומר AB=BC=CD=DA.

משפט 87: כל שתי צלעות נגדיות בריבוע מקבילות זו לזו.



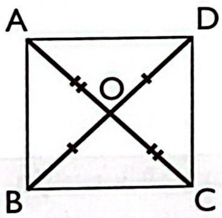
בשרטוט: המרובע ABCD הוא ריבוע, ולכן AB||DC וכן AD||BC.

משפט 88: כל הזוויות בריבוע ישרות.



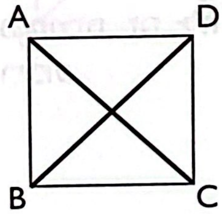
בשרטוט: המרובע ABCD הוא ריבוע ולכן כל זוויותיו ישרות, כלומר כל זוויותיו בנות $90°$.

משפט 89: האלכסונים בריבוע חוצים זה את זה.

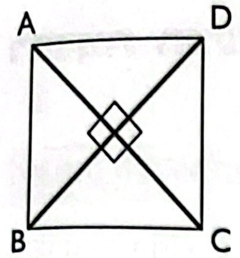


בשרטוט: המרובע ABCD הוא ריבוע ולכן אלכסוניו חוצים זה את זה, כלומר AO=OC, וכן BO=OD.

משפט 90: האלכסונים בריבוע שווים זה לזה.

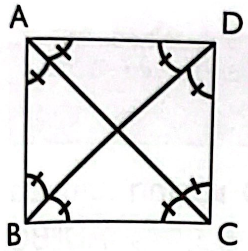


בשרטוט: המרובע ABCD הוא ריבוע, ולכן AC=BD.



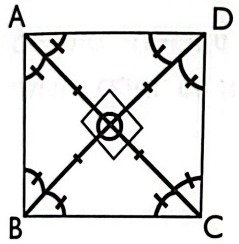
משפט 91: האלכסונים בריבוע מאונכים זה לזה.

בשרטוט: המרובע ABCD הוא ריבוע, ולכן $AC \perp BD$.



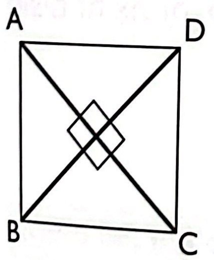
משפט 92: האלכסונים בריבוע חוצים את זוויות הריבוע.

בשרטוט: המרובע ABCD הוא ריבוע, ולכן BD ו-AC חוצים את זוויות הריבוע. כך כל אחת משמונה הזוויות המסומנות בת $45°$.



◀**מסקנה הנובעת מהמשפטים 89-92 העוסקים באלכסוני הריבוע:** האלכסונים בריבוע מחלקים אותו לארבעה משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים החופפים זה לזה.

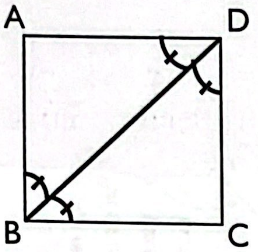
בשרטוט: ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD ו- ΔDOA משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים החופפים זה לזה.



משפט 93: אם במלבן האלכסונים מאונכים זה לזה אז הוא ריבוע.

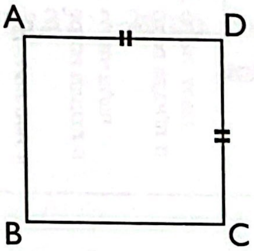
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, האלכסונים AC ו- BD מאונכים זה לזה, (בכתיב מתמטי: $AC \perp BD$) לכן הוא ריבוע.

משפט 94: אם במלבן אחד האלכסונים חוצה את זוויותיו אז הוא ריבוע.



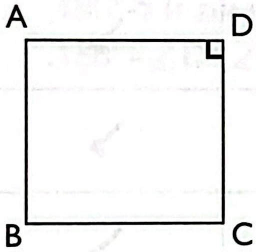
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, האלכסון BD חוצה את זוויות המלבן, ולכן הוא ריבוע.

משפט 95: אם במלבן זוג אחד של צלעות סמוכות שוות זו לזו אז הוא ריבוע.



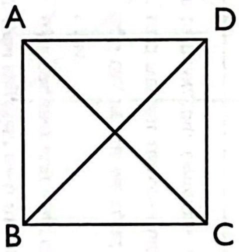
בשרטוט: המרובע ABCD הוא מלבן, הצלעות הסמוכות AD ו- DC שוות זו לזו, ולכן הוא ריבוע.

משפט 96: אם במעוין יש זווית אחת ישרה אז הוא ריבוע.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין ובו הזווית D ישרה, כלומר $\measuredangle D=90°$, ולכן הוא ריבוע.

משפט 97: אם במעוין האלכסונים שווים זה לזה אז הוא ריבוע.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא מעוין, האלכסונים AC ו- BD שווים זה לזה, כלומר AC=BD, ולכן הוא ריבוע.

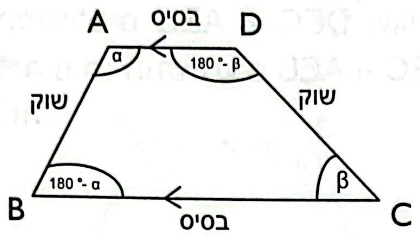
◀ *הערה: הוכחת המשפט בעמוד 127.*

נסכם את שלמדנו על אודות ארבע המקביליות בטבלה הבאה:

שם המקבילית	הגדרה	תכונות הצלעות	תכונות הזוויות	תכונות האלכסונים: חוצים זה את זה	תכונות האלכסונים: שווים זה לזה	תכונות האלכסונים: מאונכים זה לזה	תכונות האלכסונים: חוצים את הזוויות	דרכים להוכחת המקבילית
מקבילית	מרובע בו שני זוגות צלעות נגדיות המקבילות זו לזו, נקרא מקבילית.	א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו. ב. כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.	א. כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו. ב. כל שתי זוויות סמוכות משלימות זו את זו ל-$180°$.	✓				א. מרובע בו שני זוגות צלעות נגדיות המקבילות זו לזו הוא מקבילית. ב. מרובע בו שני זוגות צלעות נגדיות השוות זו לזו הוא מקבילית. ג. מרובע בו זוג אחד של צלעות נגדיות המקבילות ושוות זו לזו הוא מקבילית. ד. מרובע בו שני זוגות זוויות נגדיות השוות זו לזו הוא מקבילית. ה. מרובע בו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.
מלבן	מקבילית בעלת זווית אחת ישרה, נקראת מלבן.	א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות. ב. כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו. ג. כל שתי צלעות סמוכות מאונכות זו לזו.	כולן ישרות (בנות $90°$).	✓	✓			א. מקבילית בעלת זווית אחת ישרה היא מלבן. ב. מקבילית שאלכסוניה שווים זה לזה היא מלבן. ג. מרובע שכל זוויותיו ישרות הוא מלבן.
מעוין	מקבילית בעלת זוג אחד של צלעות סמוכות השוות זו לזו נקראת מעוין.	א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו. ב. כל הצלעות שוות זו לזו.	א. כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו. ב. כל שתי זוויות סמוכות משלימות זו את זו ל-$180°$.	✓		✓	✓	א. מקבילית בעלת זוג אחד של צלעות סמוכות השוות זו לזו היא מעוין. ב. מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה היא מעוין. ג. מקבילית שבה אחד האלכסונים חוצה את זוויותיה היא מעוין. ד. מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו הוא מעוין.
ריבוע	מרובע משוכלל. (במרובע משוכלל, ארבע הצלעות שוות זו לזו וארבע הזוויות ישרות.)	א. כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו. ב. כל שתי צלעות סמוכות מאונכות זו לזו. ג. כל הצלעות שוות זו לזו.	כולן ישרות (בנות $90°$)	✓	✓	✓	✓	א. מלבן שאלכסוניו מאונכים זה לזה הוא ריבוע. ב. מלבן שבו אחד מאלכסוניו חוצה את זוויותיו הוא ריבוע. ג. מלבן בעל זוג אחד של צלעות סמוכות השוות זו לזו הוא ריבוע. ד. מעוין בעל זווית אחת ישרה הוא ריבוע. ה. מעוין שאלכסוניו שווים זה לזה הוא ריבוע.

3. טרפזים

טרפז



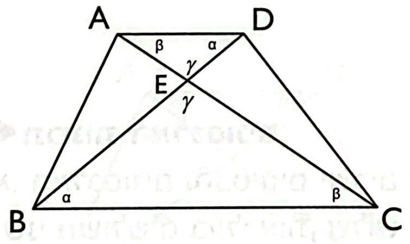
◈ **טרפז** - מרובע בו זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו וזוג אחד של צלעות נגדיות שאינן מקבילות זו לזו נקרא טרפז.

שתי הצלעות המקבילות זו לזו נקראות **בסיסים**, כל אחת מהן נקראת **בסיס**, ואילו שתי הצלעות שאינן מקבילות זו לזו נקראות **שוקיים**, כל אחת מהן נקראת **שוק**.

◀**תכונות הצלעות:** א. בסיסי הטרפז מקבילים זה לזה.
ב. שוקי הטרפז לא מקבילים זה לזה.

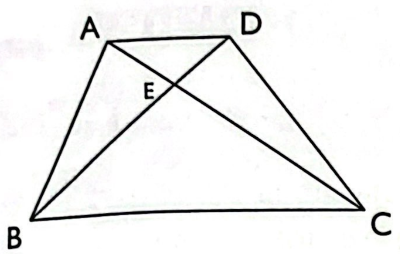
◀**תכונת הזוויות:** כל שתי זוויות המונחות על אותה שוק, משלימות זו את זו ל-$180°$,
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז, ולכן $\measuredangle A+\measuredangle B=180°$ ו- $\measuredangle C+\measuredangle D=180°$.

◀**תכונות האלכסונים:**



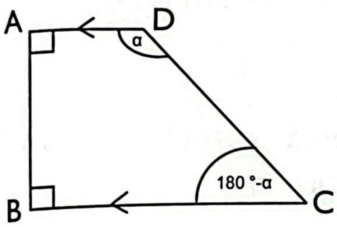
א. אלכסוני ובסיסי הטרפז יוצרים שני משולשים הדומים זה לזה, כלומר שני משולשים בעלי אותן שלוש זוויות.
בשרטוט:
הזוויות ADE ו- CBE מתחלפות ולכן הן שוות זו לזו, כך גם הזווית DAE ו- BCE. הזוויות DEA ו- BEC קדקודיות ולכן גם הן שוות זו לזו. מכאן, המשולשים ADE ו- CBE דומים זה לזה.

◀**הערה:** המשולשים ADE ו- CBE **אינם** חופפים זה לזה.



ב. אלכסוני ושוקי הטרפז יוצרים שני משולשים בעלי אותו שטח.
בשרטוט:
המשולשים AEB ו- DEC שווי שטח.
◀**הערה:** המשולשים AEB ו- DEC **אינם** חופפים זה לזה.

טרפז ישר זווית

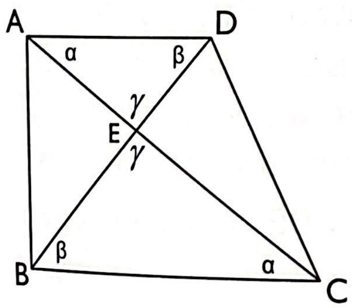


◈ **טרפז ישר זווית –** טרפז בעל זווית אחת ישרה נקרא טרפז ישר זווית. (מתכונות הטרפז ברור כי אם יש בו זווית אחת ישרה אז ישנה זווית ישרה נוספת, ולכן נאמר כי בטרפז ישר זווית יש שתי זוויות ישרות.)

◀**תכונות הצלעות:** שוק אחת של הטרפז ישר הזווית מאונכת לשני בסיסיו המקבילים זה לזה, ואילו השוק השנייה שלו לא מאונכת לבסיסיו.

◀**תכונות הזוויות:** בטרפז ישר זווית יש שתי זוויות ישרות (בנות 90°), ואילו שתי הזוויות האחרות אינן ישרות. בפרט, אחת מהן חדה והשנייה קהה, כמו כן זוויות אלו משלימות זו את זו ל- 180°.

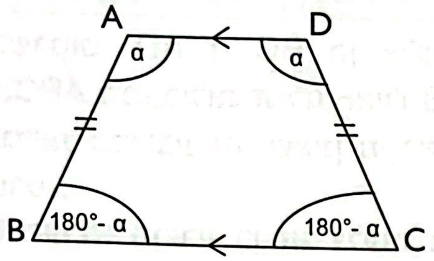
◀**תכונות האלכסונים:**



א. האלכסונים והבסיסים יוצרים שני משולשים דומים (שני משולשים בעלי אותן שלוש זוויות).
בשרטוט: ΔADE ו- ΔCBE דומים זה לזה.
ב. האלכסונים והשוקיים יוצרים שני משולשים בעלי אותו שטח.
בשרטוט: המשולשים ABE ו- DCE בעלי אותו שטח.

טרפז שווה שוקיים

◈ **טרפז שווה שוקיים** – טרפז בו שתי שוקיים שוות זו לזו נקרא טרפז שווה שוקיים.



◀**תכונות הצלעות:** בטרפז שווה שוקיים הבסיסים מקבילים זה לזה ושונים זה מזה, ואילו השוקיים לא מקבילות זו לזו אך שוות זו לזו.

בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ולכן AD∥BC, DC∦AB ו- AB=DC.

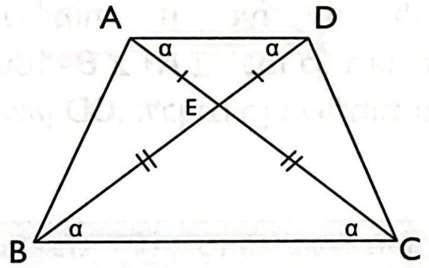
◀**תכונות הזוויות:**

א. זוויות הבסיס בטרפז שווה שוקיים שוות זו לזו.
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ולכן $\measuredangle D = \measuredangle A$ ו- $\measuredangle C = \measuredangle B$.

ב. כל שתי זוויות המונחות על אותה שוק בטרפז שווה שוקיים משלימות זו את זו ל- 180°.
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים, AB ו- CD הם שוקיו ולכן $\measuredangle A+\measuredangle B=180°$ ו- $\measuredangle C+\measuredangle D=180°$.

ג. כל שתי זוויות נגדיות בטרפז שווה שוקיים משלימות זו את זו ל- 180°.
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים, AD ו- BC הם בסיסיו ולכן $\measuredangle A+\measuredangle C=180°$ ו- $\measuredangle B+\measuredangle D=180°$.

◀**תכונות האלכסונים:**



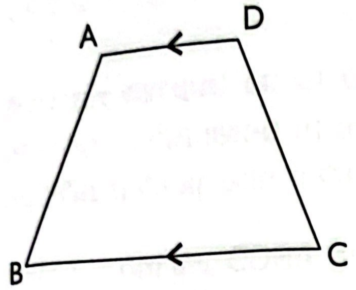
א. האלכסונים בטרפז שווה שוקיים שווים זה לזה.
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים, AC ו- BD הם אלכסוניו, ולכן הם שווים זה לזה.

ב. אלכסוני ובסיסי הטרפז שווה השוקיים יוצרים שני משולשים שווי שוקיים הדומים זה לזה.
בשרטוט: $\measuredangle EBC=\measuredangle EDA=\measuredangle ECB=\measuredangle EAD=\alpha$
ואילו, $\measuredangle AED=\measuredangle BEC=180°-2\alpha$
ולכן ΔADE ו- ΔCBE שווי שוקיים ושווי זוויות.

ג. האלכסונים והשוקיים יוצרים שני משולשים חופפים. בשרטוט: $\Delta AEB\cong\Delta DEC$.

רשימת המשפטים הקשורים לטרפזים:

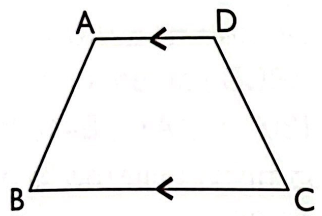
משפט 98: מרובע בו זוג אחד של צלעות נגדיות המקבילות זו לזו וזוג אחד של צלעות נגדיות שאינן מקבילות זו לזו נקרא טרפז.



בשרטוט: AD ו- BC הן צלעות נגדיות במרובע ABCD המקבילות זו לזו, ואילו AB ו- CD הן צלעות נגדיות במרובע זה, שאינן מקבילות זו לזו, ולכן הוא טרפז.

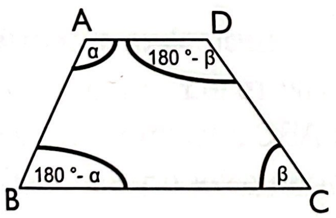
◄**הערה:** מרובע בו זוג צלעות נגדיות המקבילות זו לזו ושונות באורכן זו מזו הוא טרפז. (הצלעות המקבילות זו לזו שונות באורכן זו מזו, ולכן שתי הצלעות הנותרות בהכרח לא מקבילות זו לזו.)

משפט 99: בסיסי הטרפז מקבילים זה לזה.



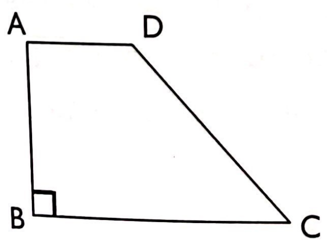
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז, AD ו- BC הם בסיסיו ולכן הם מקבילים זה לזה.

משפט 100: כל שתי זוויות המונחות על אותה השוק בטרפז, משלימות זו את זו ל-$180°$.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז ($AD \parallel BC$), הזוויות A ו- B מונחות על השוק AB, ולכן הן משלימות זו את זו ל- $180°$, כלומר: $\measuredangle A + \measuredangle B = 180°$. כמו כן, הזוויות C ו- D מונחות על השוק CD, ולכן גם הן משלימות זו את זו ל- $180°$.

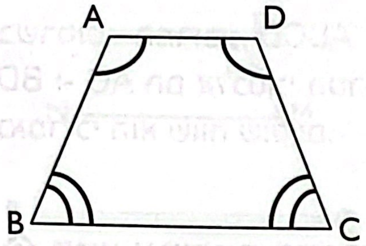
משפט 101: טרפז בעל זווית אחת ישרה הוא טרפז ישר זווית.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז ($AD \parallel BC$), $\measuredangle B = 90°$, ולכן הוא טרפז ישר זווית.

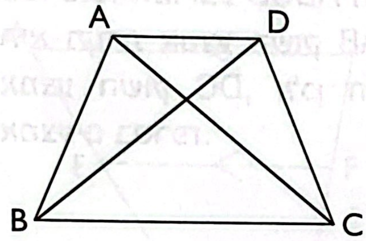
◄**הערה:** הזווית A, כמו הזווית B, בת $90°$. זאת בהתבסס על משפט 100.

משפט 102: זוויות הבסיס בטרפז שווה שוקיים שוות זו לזו.



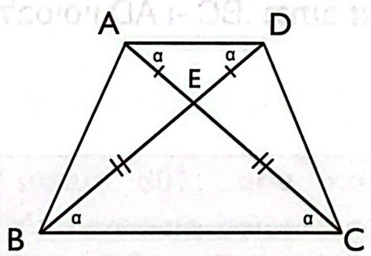
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AD \parallel BC$ ו- $AB=DC$). $\measuredangle B$ ו- $\measuredangle C$ הן זוויות הבסיס התחתון בטרפז ולכן הן שוות זו לזו. כמו כן, $\measuredangle A$ ו- $\measuredangle D$ הן זוויות הבסיס העליון בטרפז ולכן הן שוות זו לזו.

משפט 103: האלכסונים בטרפז שווה שוקיים שווים זה לזה.



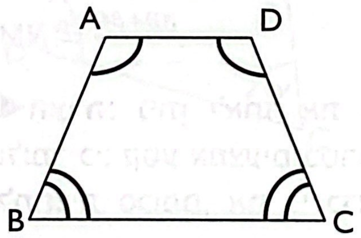
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AD \parallel BC$ ו- $AB=DC$), AC ו- BD הם אלכסוני הטרפז ולכן הם שווים זה לזה.

משפט 104: הבסיסים והאלכסונים בטרפז שווה שוקיים יוצרים שני משולשים שווי שוקיים.



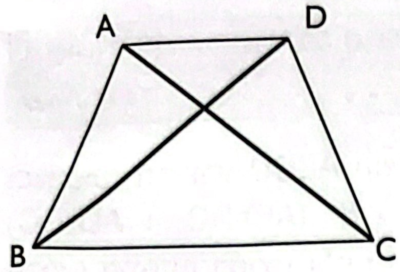
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AD \parallel BC$, $AB=DC$). AC ו- BD הם אלכסוני הטרפז היוצרים עם בסיסיו שני משולשים, AED ו- BEC. כל אחד מהמשולשים הללו שווה שוקיים, כלומר $ED=EA$ וכן $EB=EC$. שני המשולשים הללו דומים זה לזה, כלומר הם בעלי אותן שלוש זוויות.

משפט 105: אם בטרפז זוויות הבסיס שוות זו לזו אז הוא שווה שוקיים.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז ($AD \parallel BC$). $\measuredangle B$ ו- $\measuredangle C$ הן זוויות הבסיס השוות זו לזו, לכן נאמר כי הטרפז הוא שווה שוקיים.

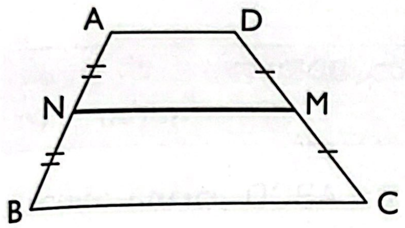
משפט 106: אם בטרפז האלכסונים שווים זה לזה אז הוא שווה שוקיים.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז (AD‖BC). BD ו- AC הם אלכסוני הטרפז השווים זה לזה, ולכן נאמר כי הוא שווה שוקיים.

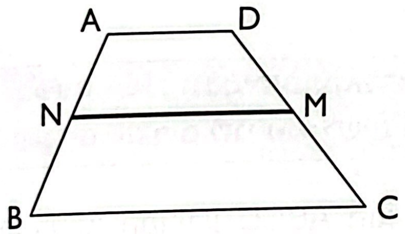
◈ קטע אמצעים בטרפז –

קטע המחבר את שתי נקודות האמצע של שוקי הטרפז נקרא קטע אמצעים בטרפז.



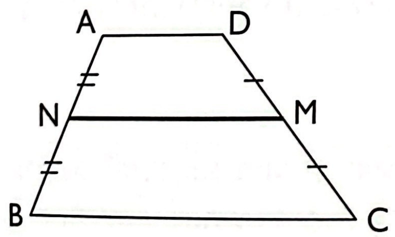
בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז (AD‖BC). N היא נקודת אמצע השוק AB, ואילו M היא נקודת אמצע השוק DC, ולכן הקטע NM נקרא קטע אמצעים בטרפז.

משפט 107: קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסיו.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז (AD‖BC). NM הוא קטע אמצעים בטרפז, ולכן הוא מקביל לבסיסיו AD ו- BC. נכתוב זאת כך: AD‖NM‖BC.

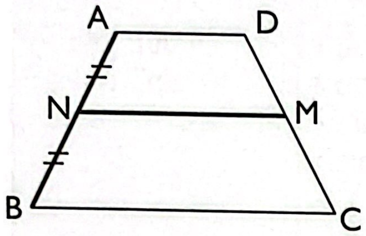
משפט 108: קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום בסיסי הטרפז.



בשרטוט: NM הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD (AD‖BC). אורך הקטע NM שווה למחצית סכום האורך של בסיסי הטרפז, נכתוב זאת כך: $NM = \frac{AD+BC}{2}$.

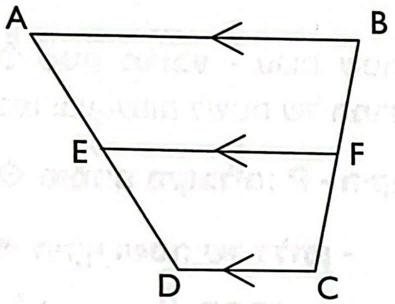
◄**הערה:** ניתן לאחד את משפטים 107 ו- 108 ולומר כי: קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסיו ושווה למחצית סכומם, אם כי כדאי גם להתייחס אל כל משפט בנפרד.

משפט 109: ישר החוצה שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסיו חוצה גם את השוק השנייה.



בשרטוט: המרובע ABCD הוא טרפז (AD||BC). N היא נקודת אמצע השוק AB, וכן הקטע NM מקביל לבסיסי הטרפז. מכאן נכון כי הנקודה M היא אמצע השוק DC כלומר DM=MC.

משפט 110: קטע שקצותיו על שוקי הטרפז, המקביל לבסיסיו ושווה למחצית סכומם, הוא קטע אמצעים בטרפז.

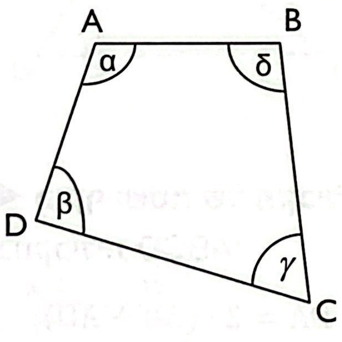


בשרטוט: הנקודה E נמצאת על השוק AD והנקודה F נמצאת על השוק BC. המרובע ABCD הוא טרפז (AB||DC). הקטע EF מקביל לבסיסי הטרפז AB ו- DC וכן אורכו שווה למחצית סכום אורכי הבסיסים הללו. מכאן, נכון הוא כי EF הוא קטע אמצעים בטרפז.

◀**הערה:** הטרפז אינו מקבילית, הרי יש בו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות המקבילות זו לזו. בכל אחת מהמקביליות ישנם שני זוגות של צלעות נגדיות המקבילות זו לזו.

4. מרובעים אחרים

מרובע כללי



◇ **מרובע שאינו דלתון, אינו מקבילית ואינו טרפז -** המצולע שבשרטוט בעל ארבע צלעות, ארבע זוויות וארבעה קדקודים, ולכן הוא מרובע. AB ו- CD צלעות נגדיות שאינן מקבילות זו לזו, כך גם AD ו- BC. מכאן, מרובע זה אינו מקבילית ואינו טרפז. כמו כן, AB ו- AD צלעות סמוכות השונות זו מזו, ולכן מרובע זה אינו דלתון. מה בכל זאת ניתן לומר עליו? סכום ארבע זוויותיו הוא $360°$, הרי כל מרובע מורכב משני משולשים.

בשרטוט: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$.

◀ נמנה את שמות עשרת המרובעים בטבלה הבאה:

דלתונים	מקביליות	טרפזים	אחר
• דלתון קעור • דלתון קמור	• מקבילית • מלבן • מעוין • ריבוע	• טרפז (רגיל) • טרפז ישר זווית • טרפז שווה שוקיים	• מרובע שאינו דלתון, אינו מקבילית ואינו טרפז.

היקפים ושטחים של מרובעים

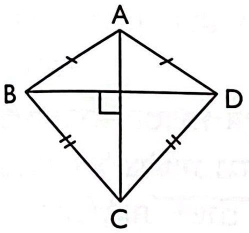
◈ **היקף מרובע** - סכום אורכי צלעות המרובע.

◈ **שטח מרובע** - סכום שטחי שני המשולשים הנוצרים על ידי העברת אלכסון אחד במרובע, שווה לשטח של המרובע.

◈ **סימנים מקובלים: P - היקף, S - שטח.**

◀ **היקף ושטח של דלתון -**

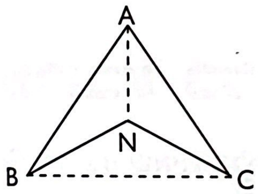
בדלתון הקמור ABCD:



$$P = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC$$

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

בדלתון הקעור ABNC:

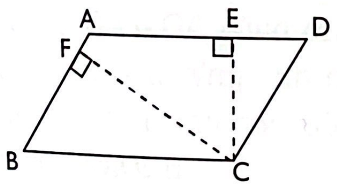


$$P = AB + BN + NC + CA = 2 \cdot AB + 2 \cdot BN$$

$$S = \frac{AN \cdot BC}{2}$$

◀ **היקף ושטח של מקבילית -**

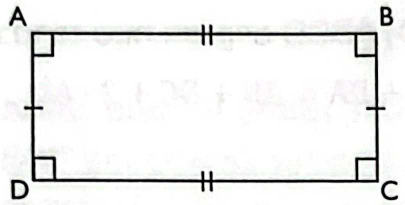
במקבילית ABCD:



$$P = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot (AB + AD)$$

$$S = EC \cdot AD, \quad S = FC \cdot AB$$

◀**היקף ושטח של מלבן -**



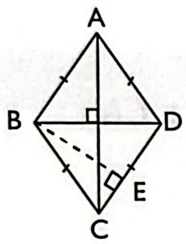
במלבן ABCD:

$$P = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot (AB + BC)$$

◀**הערה:**

מחצית שטח של מלבן שצלעותיו a ו- b, שווה לשטח של משולש ישר זווית שניצביו הם a ו- b.

◀**היקף ושטח של מעוין -**

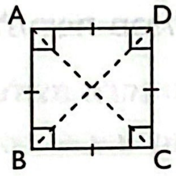


במעוין ABCD:

$$P = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$$

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2}, \qquad S = EB \cdot CD$$

◀**היקף ושטח של ריבוע -**

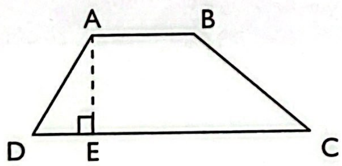


בריבוע ABCD:

$$P = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$$

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AC^2}{2} \quad , \quad S = AB \cdot BC = AB^2$$

◀**היקף ושטח של טרפז -**

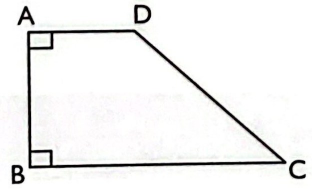


בטרפז ABCD ‏(AB‖CD):

$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$S = \frac{(AB + DC) \cdot AE}{2}$$

◀**היקף ושטח של טרפז ישר זווית -**

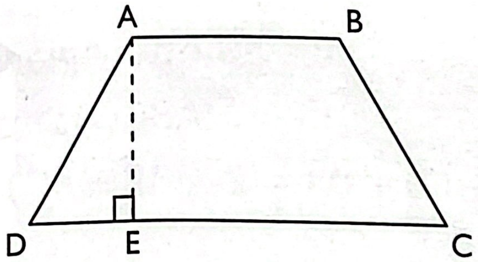


בטרפז ישר הזווית ABCD ‏(AD‖BC, ∡B=90°):

$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$S = \frac{AB \cdot (AD + BC)}{2}$$

◀**היקף ושטח של טרפז שווה שוקיים -**

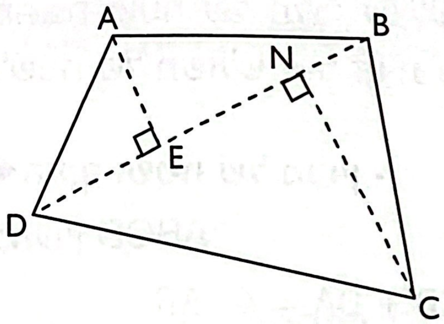


בטרפז שווה השוקיים ABCD (AB‖CD ו- AD=BC):

$$P = AB + BC + CD + DA = AB + DC + 2 \cdot AD$$

$$S = \frac{EA \cdot (AB + DC)}{2}$$

◀**היקף ושטח של מרובע אחר -**



במרובע ABCD:

$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$S = \frac{AE \cdot BD}{2} + \frac{CN \cdot BD}{2} = \frac{BD}{2} \cdot (AE + CN)$$

◀**הערה:** אם במרובע האלכסונים **מאונכים** זה לזה (דלתון, מעוין וריבוע) אז כדאי לזכור כי שטחו שווה למחצית מכפלת אורכי אלכסוניו.