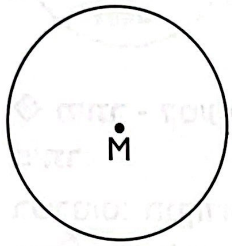
פרק רביעי: מעגלים



◈ **מעגל –** אוסף כל הנקודות הנמצאות באותו מרחק מנקודה אחת נקרא מעגל, נקודה זו נקראת מרכז המעגל.

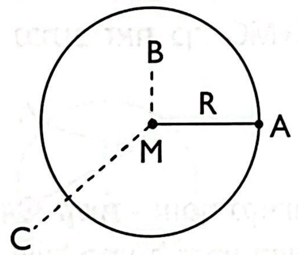
בשרטוט: M היא נקודת מרכז המעגל, כל הנקודות על המעגל נמצאות באותו מרחק מהנקודה M.

לשון אחר: קבוצת כל הנקודות שמרחקן מנקודה כלשהי שווה לאורך קבוע, נקראת מעגל.

◄**הערה:** באמרנו, "המעגל M" כוונתנו למעגל שנקודת המרכז שלו היא M.

משפט 114: דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.

◈ **עיגול –** אוסף כל הנקודות הנמצאות בתוך המעגל נקרא עיגול.

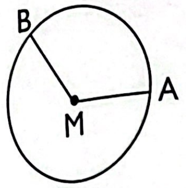


◈ **רדיוס –** קטע המחבר נקודה כלשהי על המעגל עם נקודת מרכז המעגל נקרא רדיוס (מחוג), והוא מסומן על ידי האות R.

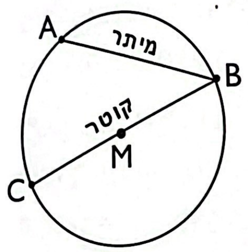
בשרטוט: הקטע AM הוא רדיוס במעגל M.

◄**הערה:** מעגל מכיל אין-סוף נקודות, ולכן בכל מעגל קיימים אין-סוף רדיוסים. מהגדרת המעגל נובע כי כל הרדיוסים בו שווים זה לזה. המרחק בין נקודה הנמצאת מחוץ למעגל לבין נקודת מרכז המעגל ארוך יותר מרדיוס, ואילו המרחק בין נקודה הנמצאת בתוך המעגל קצר יותר מרדיוס.
בשרטוט: B נקודה הנמצאת בתוך המעגל M, ולכן אורך הקטע BM קצר יותר מרדיוס, ואילו C נקודה הנמצאת מחוץ למעגל, ולכן אורך הקטע CM ארוך יותר מרדיוס. נכתוב זאת בקצרה: $BM<R$ וכן $CM>R$.

משפט 115: רדיוסים במעגל שווים זה לזה.



בשרטוט: AM ו- BM רדיוסים במעגל M, ולכן הם שווים זה לזה, כלומר: AM=BM.



◈ **מיתר -** קטע המחבר שתי נקודות כלשהן על המעגל נקרא **מיתר**.

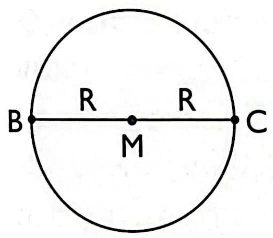
בשרטוט: הנקודות A ו- B נמצאות על המעגל M, ולכן AB מיתר במעגל זה.

◈ **קוטר -** מיתר העובר דרך נקודת מרכז המעגל נקרא **קוטר**.

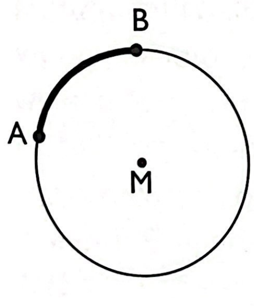
בשרטוט: המיתר BC עובר דרך נקודת מרכז המעגל M, ולכן הוא קוטר במעגל.

◀**הערה:** קוטר הוא המיתר הארוך ביותר הקיים במעגל. ברור כי בכל מעגל ישנם אין-סוף קטרים השווים זה לזה.

משפט 116: קוטר במעגל שווה באורכו לשני רדיוסים.



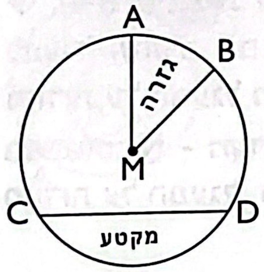
בשרטוט: BC קוטר במעגל שמרכזו בנקודה M, ולכן אורכו שווה לסכום אורכי הרדיוסים BM ו- MC.
נכתוב זאת כך: BC=BM+MC, כלומר BC=2R.



◈ **קשת -** אוסף נקודות על המעגל המוגבלות בין שתי נקודות שעל המעגל נקרא **קשת**.
בשרטוט: הקשת AB המודגשת שייכת למעגל M. נהוג לסמן את הקשת כך: $\overset{\frown}{AB}$

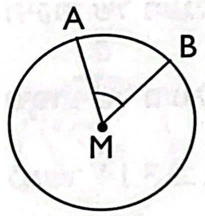
◀**הערה:** נבחין בין הקשת הקצרה AB - הקשת המודגשת בשרטוט לבין הקשת הארוכה AB - הקשת שאינה מודגשת בשרטוט, נדגיש כי באמרנו "קשת" כוונתינו היא לקשת הקצרה.

◈ **גזרה** – השטח הכלוא בין קשת של המעגל ושני רדיוסיו נקרא גזרה.



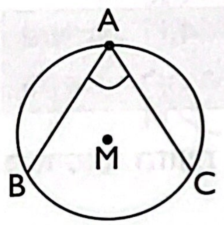
◈ **מקטע** – השטח הכלוא בין מיתר של המעגל לבין הקשת המתאימה לו נקרא מקטע .

בשרטוט: השטח בין רדיוסי המעגל AM ו- BM לבין הקשת AB נקרא גזרה, ואילו השטח בין הקשת CD והמיתר CD נקרא מקטע.



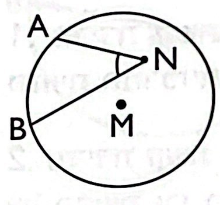
◈ **זווית מרכזית** – זווית שקדקודה נמצא **במרכז** המעגל ושוקיה הם רדיוסיו נקראת זווית מרכזית במעגל.

בשרטוט: AM ו- BM רדיוסי המעגל M, ולכן הזווית AMB היא מרכזית בו.



◈ **זווית היקפית** – זווית שקדקודה נמצא על **היקף** המעגל ושוקיה הם מיתרים בו נקראת זווית היקפית במעגל.

בשרטוט: AB ו- AC מיתרים במעגל M, ולכן הזווית BAC היא היקפית בו.

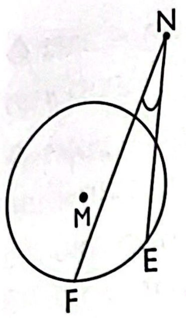


◈ **זווית פנימית** – זווית שקדקודה נמצא **בתוך** המעגל ושוקיה הם הקטעים המחברים את קדקודה עם נקודות על המעגל, נקראת זווית פנימית במעגל.

בשרטוט: N נקודה הנמצאת בתוך המעגל M, A ו- B נקודות על המעגל, ולכן הזווית BNA היא זווית פנימית בו.

◈ **זווית חיצונית למעגל** – זווית שקדקודה נמצא **מחוץ** למעגל ושוקיה הם הקטעים המחברים את קדקודה עם נקודות על המעגל נקראת זווית חיצונית למעגל.

בשרטוט: N - נקודה הנמצאת מחוץ למעגל, E ו- F הן נקודות על המעגל, ולכן הזווית ENF חיצונית לו.



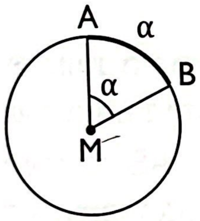
היקף ושטח של מעגל

היקפו של מעגל תלוי ברדיוס, והוא מוגדר: $\boxed{P = 2R\pi}$

שטחו של מעגל תלוי ברדיוס, והוא מוגדר: $\boxed{S = R^2\pi}$

כאשר $\pi \cong 3.14$

משפט 117: זווית מרכזית במעגל שווה לגודל הקשת עליה היא נשענת.



בשרטוט: הזווית המרכזית AMB שווה בגודלה לקשת AB.

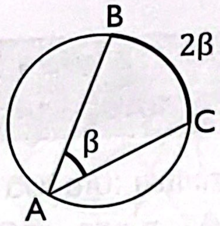
◀**הערה:** ניתן למדוד את גודלה של קשת במעגל בשתי דרכים שונות:

1. מדידת קשת במעלות: באמרנו כי הקשת AB בת $70°$ אז כוונתינו היא כי גודלה של הזווית המרכזית (היחידה) הנשענת על הקשת AB היא בת $70°$.

2. מדידת קשת ביחידות אורך: אורך קשת של מעגל תלוי בגודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת וכן באורכו של רדיוס המעגל. נסמן את רדיוס המעגל על ידי R וזווית מרכזית כלשהי על ידי α. אורך הקשת המתאימה לזווית α במעגל שרדיוס R מוגדר להיות: $\boxed{\left(\frac{\alpha}{360°}\right)2R\pi}$ יחידות אורך.

באופן אינטואיטיבי נאמר כי אם נפרוש חוט לאורך קשת השייכת למעגל, ולאחר מכן "נמתח" את החוט לקו ישר אפשר יהיה למדוד את אורכו של החוט, כך נוכל למדוד את אורכה של הקשת.

משפט 118: זווית היקפית במעגל שווה למחצית גודל הקשת עליה היא נשענת.

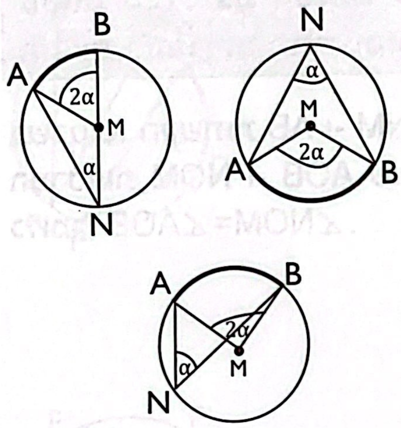


בשרטוט: הזווית ההיקפית BAC שווה בגודלה למחצית הקשת BC, כלומר: אם $\measuredangle BAC=\beta$ אז הקשת $BC = 2\beta$.

◀**הערות:**

1. לכל קשת במעגל מתאימה בדיוק זווית מרכזית אחת.
2. לכל קשת במעגל מתאימות אין-סוף זוויות היקפיות.

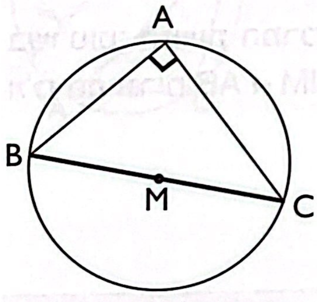
משפט 119: זווית היקפית במעגל שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (או על קשתות שוות).



בשרטוטים: הזווית המרכזית AMB נשענת על הקשת AB במעגל M. הזווית ההיקפית ANB נשענת על אותה הקשת במעגל זה, ולכן היא שווה למחצית הזווית המרכזית AMB.

נכתוב זאת כך: $\measuredangle ANB = \frac{\measuredangle AMB}{2}$.

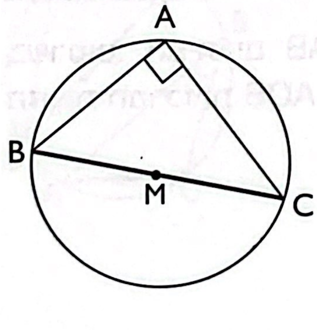
משפט 120: זווית היקפית הנשענת על קוטר ישרה.



בשרטוט: הזווית BAC היקפית במעגל M, היא נשענת על הקוטר BC, ולכן היא ישרה (בת 90°).

◀הערה: הוכחת המשפט בעמוד 128.

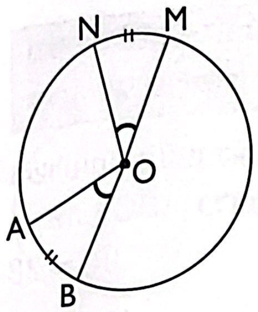
משפט 121: אם זווית היקפית בת 90°, אז המיתר עליו היא נשענת הוא קוטר.



בשרטוט: הזווית BAC היקפית במעגל M, כמו כן היא ישרה, ולכן המיתר BC הוא קוטר במעגל.

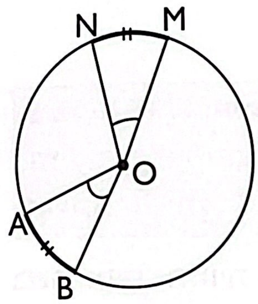
משפט 122: אם זוויות מרכזיות במעגל שוות זו לזו אז הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.

בשרטוט: הזוויות המרכזיות NOM ו- AOB שוות זו לזו, ולכן הקשת NM שווה בגודלה לקשת AB, כלומר:
$\overset{\frown}{NM}=\overset{\frown}{AB}$.



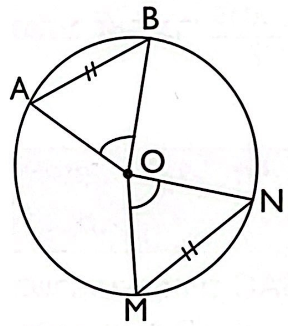
משפט 123: אם קשתות במעגל שוות זו לזו אז הזוויות המרכזיות המתאימות להן שוות זו לזו.

בשרטוט: הקשתות AB ו- NM שוות זו לזו, ולכן הזוויות המרכזיות NOM ו- AOB שוות זו לזו.
כלומר: $\measuredangle NOM=\measuredangle AOB$.



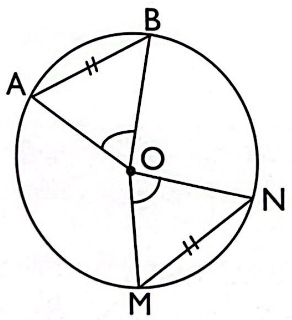
משפט 124: אם זוויות מרכזיות במעגל שוות זו לזו אז המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.

בשרטוט: הזוויות המרכזיות AOB ו- NOM שוות זו לזו, ולכן המיתרים AB ו- NM שווים זה לזה.

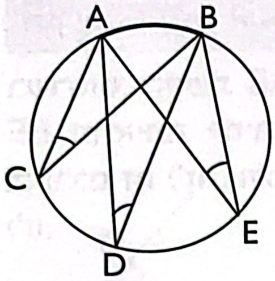


משפט 125: אם מיתרים במעגל שווים זה לזה אז הזוויות המרכזיות הנשענות עליהם שוות זו לזו.

בשרטוט: המיתרים AB ו- NM שווים זה לזה, ולכן הזוויות המרכזיות AOB ו- NOM שוות זו לזו.

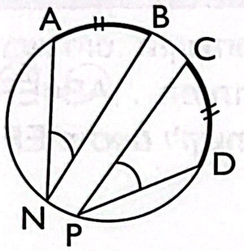


משפט 126: זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (או על קשתות שוות), שוות זו לזו.



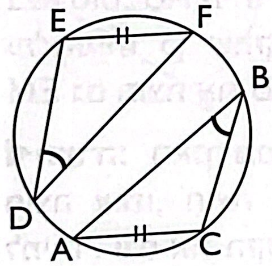
בשרטוט: הנקודות C, D ו-E נמצאות על המעגל, כך גם הנקודות A ו- B. הזוויות ACB, ADB ו- AEB הן זוויות היקפיות הנשענות על הקשת AB. כיוון ששלוש הזוויות ההיקפיות הללו נשענות על אותה קשת, נאמר כי הן שוות זו לזו.

משפט 127: אם קשתות במעגל שוות זו לזו אז הזוויות ההיקפיות הנשענות עליהן שוות זו לזו.



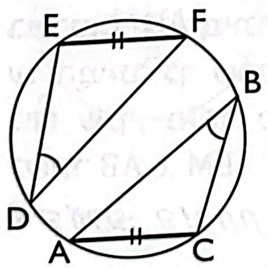
בשרטוט: הקשתות המודגשות AB ו- CD שוות זו לזו, הזוויות ההיקפיות ANB ו- CPD נשענות על הקשתות הללו, ולכן הן שוות זו לזו.

משפט 128: אם זוויות היקפיות במעגל שוות זו לזו אז המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.



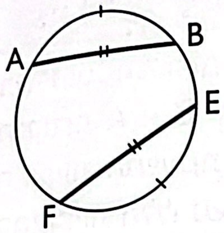
בשרטוט: הזוויות ההיקפיות EDF ו- ABC שוות זו לזו, המיתר EF מתאים לזווית EDF והמיתר AC מתאים לזווית ABC. כיוון שהזוויות הללו שוות זו לזו, נאמר כי גם המיתרים שווים זה לזה.

משפט 129: אם מיתרים במעגל שווים זה לזה אז הזוויות ההיקפיות הנשענות עליהם שוות זו לזו.



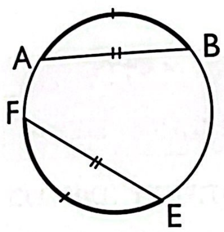
בשרטוט: המיתרים EF ו- CA שווים זה לזה, הזווית ההיקפית EDF נשענת על המיתר EF ואילו הזווית ההיקפית ABC נשענת על המיתר AC. כיוון ששתי הזוויות ההיקפיות הללו נשענות על מיתרים השווים זה לזה, הרי שהן שוות זו לזו בגודלן.

משפט 130: אם מיתרים במעגל שווים זה לזה אז הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.



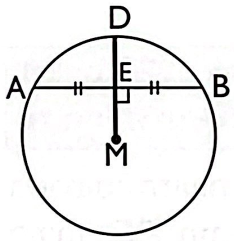
בשרטוט: הקשת AB מתאימה למיתר AB, ואילו הקשת EF מתאימה למיתר EF. המיתרים AB ו- EF שווים באורכם זה לזה, ולכן הקשתות AB ו- EF שוות בגודלן זו לזו.

משפט 131: אם קשתות במעגל שוות זו לזו אז המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.



בשרטוט: הקשתות AB ו- EF שוות בגודלן זו לזו, כלומר $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{EF}$. המיתר AB מתאים לקשת AB ואילו המיתר EF מתאים לקשת EF, ולכן הם שווים זה לזה.

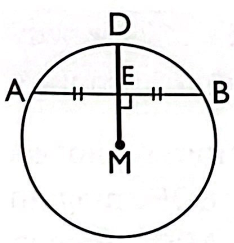
משפט 132: האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה אותו.



בשרטוט: AB מיתר במעגל שמרכזו בנקודה E ,M נקודה על המיתר כך שהקטע EM מאונך לו, כיוון שכך נאמר כי EM גם חוצה את AB, כלומר EA=EB.

◀**הערה:** האנך ממרכז המעגל למיתר, בנוסף לכך שהוא חוצה אותו, חוצה גם את הזווית המרכזית המתאימה למיתר, וגם את הקשת המתאימה למיתר.

משפט 133: קטע ממרכז המעגל החוצה מיתר מאונך לו.

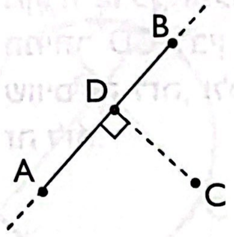


בשרטוט: AB מיתר במעגל שמרכזו בנקודה E ,M נקודה על המיתר כך שהקטע EM חוצה אותו, כלומר EA=EB. כיוון שכך, נאמר כי הקטע EM גם מאונך למיתר AB, כלומר $EM \perp AB$

◀הערה: הוכחת המשפט בעמוד 129.

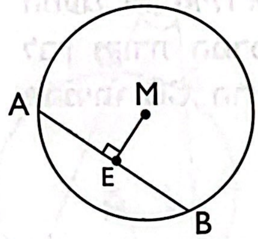
מרחק בין נקודה לישר

◈ **מרחק בין נקודה לישר -** הקטע הקצר ביותר המחבר נקודה כלשהי עם קו ישר נקרא מרחק בין נקודה לישר.
בשרטוט: C היא נקודה כלשהי שאינה נמצאת על הישר AB, D היא נקודה על הישר AB הקרובה ביותר ל- C.
אורך הקטע CD מייצג את המרחק בין הנקודה C לבין הישר AB.



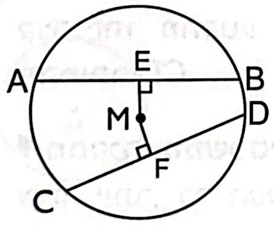
◄**הערה:** כיוון שהנקודה D היא הקרובה ביותר לנקודה C מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר AB הרי שהקטע CD מאונך לישר AB, כלומר הזווית BDC ישרה ($\measuredangle BDC=90°$).

◈ **מרחק בין נקודת מרכז המעגל לבין מיתר -** במעגל שמרכזו M, E היא נקודה על המיתר AB הקרובה ביותר לנקודה M, כיוון שכך, הקטע EM מאונך למיתר AB. אורך הקטע EM הינו המרחק בין נקודת מרכז המעגל M לבין המיתר AB.

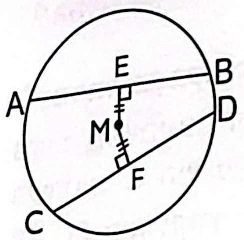


משפט 134: מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

בשרטוט: AB ו- CD מיתרים במעגל M השווים זה לזה.
אורך הקטע EM מייצג את המרחק בין AB לבין M ואילו אורך הקטע FM מייצג את המרחק בין CD לבין M. כיוון שהמיתרים AB ו- CD שווים באורכם, הרי מרחקיהם ממרכז המעגל M שווה, כלומר EM=FM.

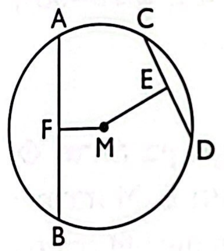


משפט 135: מיתרים הנמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל שווים זה לזה.



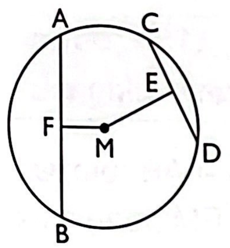
בשרטוט: EM מייצג את המרחק בין המיתר AB לבין נקודת מרכז המעגל M, ואילו FM מייצג את המרחק בין המיתר CD לבין נקודת מרכז המעגל M. EM ו- FM שווים זה לזה, ולכן המיתרים AB ו- CD שווים באורכם זה לזה.

משפט 136: במעגל, אם מיתר כלשהו ארוך יותר ממיתר אחר, אז הוא קרוב יותר לנקודת מרכז המעגל.



בשרטוט: המיתר AB ארוך יותר מהמיתר CD. FM מייצג את המרחק בין המיתר AB לבין נקודת מרכז המעגל M, ואילו EM מייצג את המרחק בין המיתר CD לבין נקודת המרכז M. כיוון שהמיתר AB ארוך יותר מהמיתר CD, הרי שהקטע FM קצר יותר מהקטע EM.

משפט 137: אם מיתר כלשהו קרוב יותר לנקודת מרכז המעגל ממיתר אחר, אז הוא ארוך יותר.

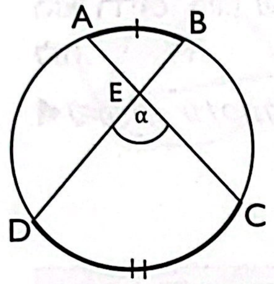


בשרטוט: FM מייצג את המרחק בין המיתר AB לבין נקודת מרכז המעגל M ואילו EM מייצג את המרחק בין המיתר CD לבין נקודת המרכז M. כיוון שהקטע FM קצר יותר מהקטע EM, הרי שהמיתר AB ארוך יותר מהמיתר CD.

◀**מסקנה ממשפטים 137-134:** ככל שמיתר במעגל ארוך יותר, כך הוא קרוב יותר לנקודת מרכז המעגל.

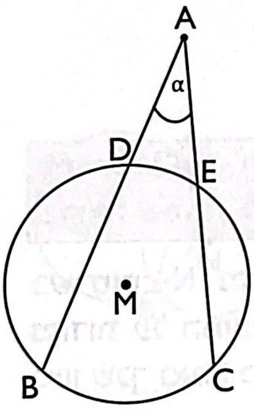
◀**הערה:** המיתר הארוך ביותר בכל מעגל הוא קוטר, זאת כי הוא עובר דרך נקודת המרכז, ולכן המרחק בין הקוטר לבין נקודת המרכז הינו אפס.

משפט 138: במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.

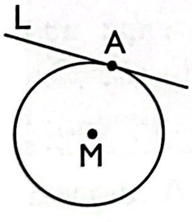


בשרטוט: המיתרים AC ו- BD נחתכים בנקודה E הנמצאת בתוך המעגל, הזווית הכלואה ביניהם סומנה על ידי האות α, הקשתות AB ו- CD כלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן. נאמר כי גודלה של הזווית α שווה למחצית סכום גודלן של הקשתות AB ו- CD. נכתוב זאת כך: $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}$.

משפט 139: במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.



בשרטוט: המשכי המיתרים EC ו- BD נחתכים בנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל, הזווית הכלואה בין AC ו- AB סומנה על ידי α, הקשתות DE ו- BC כלואות בין שוקי הזווית. נאמר כי גודלה של הזווית α שווה למחצית ההפרש בין גודל הקשת BC לבין גודל הקשת DE. נכתוב זאת כך: $\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{2}$.

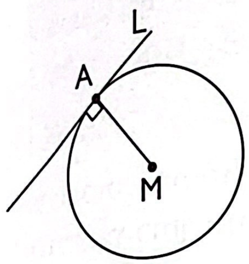


◈ **משיק -** קו ישר הנוגע במעגל בנקודה אחת בלבד נקרא משיק.

◈ **נקודת השקה** – הנקודה היחידה על המעגל, אשר ישר המשיק לו נוגע בה , נקראת נקודת השקה (נקודת מגע).

בשרטוט: הישר L משיק למעגל M, הנקודה A היא נקודת ההשקה (נקודת המגע).

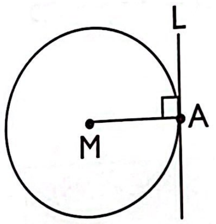
משפט 140: משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.



בשרטוט: הישר L משיק למעגל M בנקודה A, ולכן AM הוא רדיוס. כיוון שכך, הישר L והרדיוס AM מאונכים זה לזה.

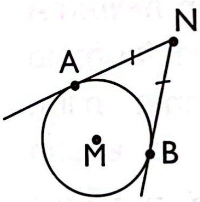
► הערה: הוכחת המשפט בעמוד 130.

משפט 141: ישר המאונך לרדיוס בנקודה הנמצאת על המעגל משיק למעגל.



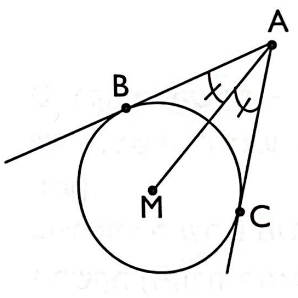
בשרטוט: AM רדיוס במעגל שמרכזו M, הישר L מאונך לו בנקודה A, ולכן הוא משיק למעגל בנקודה זו.

משפט 142: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שמחוץ למעגל שווים זה לזה.



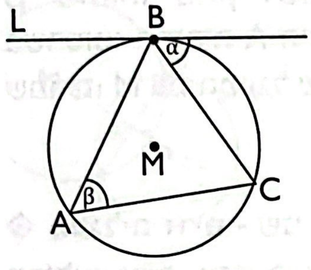
בשרטוט: N נקודה הנמצאת מחוץ למעגל M, A ו-B נקודות על המעגל כך שהקטעים AN ו- BN משיקים לו. כיוון שכך נאמר כי הקטעים AN ו- BN שווים זה לזה.

משפט 143: קטע המחבר את נקודת מרכז המעגל עם נקודה שמחוץ למעגל אשר ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין שני המשיקים.



בשרטוט: A נקודה מחוץ למעגל M, B ו- C נקודות על המעגל כך שהקטעים AB ו- AC משיקים לו. הקטע AM חוצה את הזווית BAC, זו הכלואה בין שני המשיקים הללו, כלומר $\measuredangle BAM=\measuredangle CAM$.

משפט 144: זווית הכלואה בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.



בשרטוט: A, B ו- C נקודות על המעגל שמרכזו בנקודה M, הישר L משיק למעגל זה בנקודה B. הזווית α כלואה בין המשיק לבין המיתר BC ואילו הזווית β היא זווית היקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני. כיוון שכך, נאמר כי הזוויות α ו- β שוות זו לזו. (α=β)

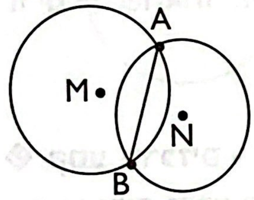
◀הערה: הוכחת המשפט בעמוד 131.

שני מעגלים

◀**מצבים הדדיים בין שני מעגלים**

◇ **מעגלים נחתכים** – שני מעגלים החותכים זה את זה בשתי נקודות נקראים מעגלים נחתכים.

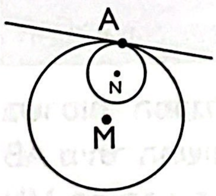
בשרטוט: הנקודות A ו- B נמצאות על שני המעגלים, האחד שמרכזו בנקודה M והשני שמרכזו בנקודה N. נאמר כי שני המעגלים הללו נחתכים בשתי הנקודות A ו- B. כמו כן, AB הוא מיתר המשותף לשניהם.

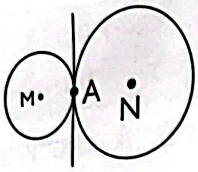


◇ **מעגלים משיקים** - שני מעגלים הנוגעים זה בזה בנקודה אחת בלבד נקראים מעגלים משיקים. נקודה זאת נקראת נקודת ההשקה. יתכן ושני המעגלים משיקים זה לזה מבפנים, או לחילופין, אלה משיקים זה לזה מבחוץ.

◇ **מעגלים משיקים מבפנים** - שני מעגלים המשיקים זה לזה כך שאחד מהם בתוך השני נקראים מעגלים משיקים מבפנים.

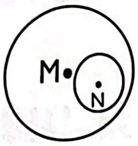
בשרטוט: הנקודה A היא נקודת ההשקה מבפנים של המעגל שמרכזו N עם המעגל שמרכזו M.



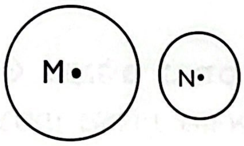


◈ **מעגלים משיקים מבחוץ -** שני מעגלים המשיקים זה לזה כך שהאחד מחוץ לשני נקראים מעגלים משיקים מבחוץ.
בשרטוט: הנקודה A היא נקודת ההשקה מבחוץ של המעגל שמרכזו M עם המעגל שמרכזו N.

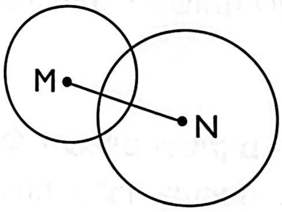
◈ **מעגלים זרים -** שני מעגלים ללא נקודה משותפת נקראים מעגלים זרים. יתכן כי שני המעגלים זרים כך שהאחד מוכל בשני או לחילופין, כך שהאחד מחוץ לשני.



בשרטוט: המעגל שמרכזו N מוכל במעגל שמרכזו בנקודה M, כך שאין להם נקודה משותפת, אלה מעגלים זרים שהאחד מהם מוכל בשני.



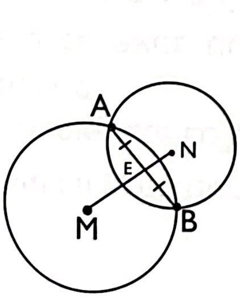
בשרטוט: המעגל שמרכזו N נמצא מחוץ למעגל שמרכזו בנקודה M, כך שאין להם נקודה משותפת. אלה מעגלים זרים כך שהאחד מהם נמצא מחוץ לשני.



◈ **קטע מרכזים -** קטע המחבר את שתי נקודות המרכז של שני מעגלים נקרא קטע מרכזים.
בשרטוט: M ו- N הן נקודות המרכז של שני המעגלים הנחתכים, הקטע MN הוא קטע המרכזים של שני המעגלים הללו.

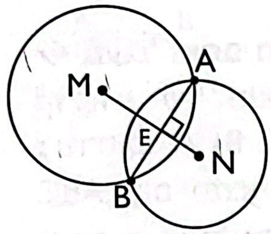
◀רשימת המשפטים הקשורים לשני מעגלים:

משפט 145: קטע מרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף למעגלים.



בשרטוט: המעגלים M ו- N נחתכים בנקודות A ו- B, ולכן AB מיתר המשותף להם. קטע המרכזים למעגלים אלה הוא MN החותך את AB בנקודה E. MN חוצה את AB, כלומר AE=BE.

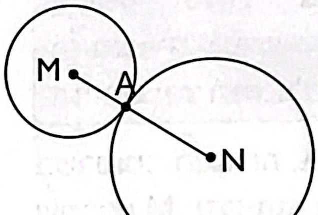
משפט 146: קטע מרכזים של שני מעגלים נחתכים מאונך למיתר המשותף למעגלים.



בשרטוט: המעגלים M ו- N נחתכים בנקודות A ו- B, ולכן AB מיתר המשותף להם. קטע המרכזים למעגלים אלה הוא MN החותך את AB בנקודה E. MN מאונך ל- AB, כלומר הזווית NEA ישרה. ($\measuredangle NEA=90°$)

◀**הערה:** ניתן לאחד את המשפטים 145 ו- 146 ולומר כי קטע מרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף להם ומאונך לו, אם כי כדאי גם להתייחס אל כל משפט בנפרד.

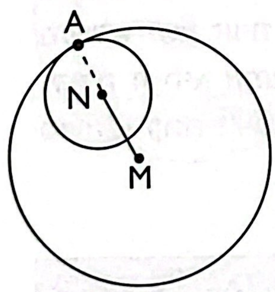
משפט 147: נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ נמצאת על קטע המרכזים של המעגלים.



בשרטוט: המעגלים M ו- N משיקים מבחוץ זה לזה, A היא נקודת ההשקה. קטע המרכזים של המעגלים MN עובר דרך A.

◀**הערה:** אורך קטע המרכזים של שני מעגלים המשיקים מבחוץ זה לזה שווה לסכום אורכי רדיוסי המעגלים. בשרטוט: AM רדיוס המעגל M כמו כן AN רדיוס המעגל N, ולכן נאמר כי MN=AM+AN.

משפט 148: נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה מבפנים נמצאת על המשכו של קטע המרכזים של המעגלים.

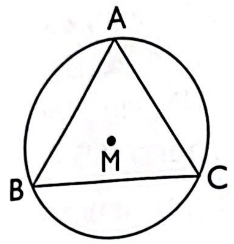


בשרטוט: המעגלים M ו- N משיקים זה לזה מבפנים, A היא נקודת ההשקה. המשכו של קטע המרכזים של המעגלים עובר דרך A.

◀**הערה:** אורך קטע המרכזים של שני מעגלים המשיקים מבפנים זה לזה שווה להפרש אורכי רדיוסי המעגלים. בשרטוט: AM רדיוס המעגל M ואילו AN רדיוס המעגל N, ולכן נאמר כי MN=AM-AN.

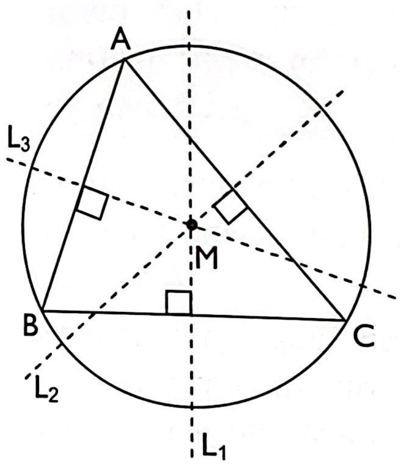
מעגל חוסם ומעגל חסום

◈ **מעגל חוסם משולש** – מעגל העובר דרך שלושת קדקודיו של משולש נקרא מעגל חוסם משולש. בשרטוט: A, B ו- C הם שלושת קדקודי המשולש ABC, הם נמצאים על המעגל שמרכזו בנקודה M. נאמר כי מעגל זה חוסם את המשולש ABC. כמו כן, כל אחת מצלעות המשולש היא מיתר במעגל.



◄**הערה:** באמרנו מעגל חוסם משולש, נבחין בכך שהמשולש חסום במעגל.

משפט 149: במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודת המרכז של המעגל החוסם את המשולש.



בשרטוט: הנקודות A, B ו- C נמצאות על המעגל שמרכזו M, ולכן הוא חוסם את המשולש ABC. הישר L_1 אנך אמצעי לצלע BC, הישר L_2 אנך אמצעי לצלע AC ואילו L_3 אנך אמצעי לצלע AB. שלושת האנכים האמצעיים הללו נפגשים בנקודה M, היא מרכזו של המעגל החוסם את המשולש ABC.

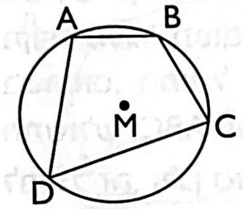
מיקומה של נקודת מפגש האנכים האמצעיים במשולש:

משולש חד זוויות - שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה הנמצאת **בתוך** המשולש.
משולש ישר זווית - שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה הנמצאת **על** המשולש. נקודה זו היא אמצע היתר.
משולש קהה זווית - שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה הנמצאת **מחוץ** למשולש.

משפט 150: כל משולש ניתן לחסום במעגל.

◄**הערה:** מתוך משפט 114 האומר כי: "דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד", עולה כי: "כל משולש ניתן לחסום במעגל". זאת, כי משולש הינו מצולע בעל שלוש צלעות ושלושה קדקודים **שאינם** על קו ישר אחד.

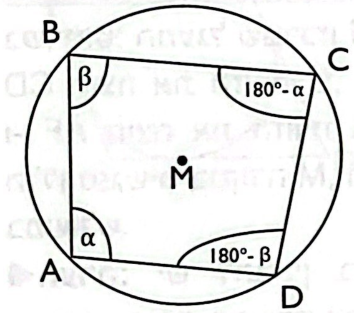
◈ **מעגל חוסם מרובע** – מעגל העובר דרך ארבעת קדקודיו של מרובע נקרא מעגל חוסם מרובע.



בשרטוט: A, B, C, ו- D הם ארבעת קדקודי המרובע ABCD, הם נמצאים על המעגל שמרכזו בנקודה M. נאמר כי מעגל זה חוסם את המרובע ABCD. כמו כן, כל אחת מצלעות המרובע היא מיתר במעגל.

◈ **מרובע בר חסימה** - כל מרובע שניתן לחסום אותו במעגל נקרא מרובע בר חסימה.

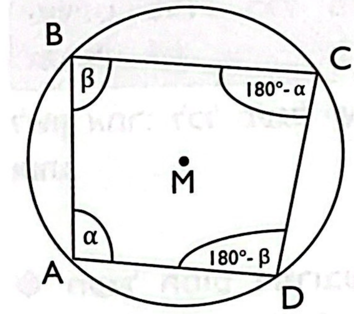
משפט 151: במרובע בר חסימה כל שתי זוויות נגדיות משלימות זו את זו ל- 180°.



בשרטוט: המרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו M. הזוויות A ו- C נגדיות ולכן משלימות זו את זו ל- 180°. כמו כן, הזוויות B ו- D, אף הן נגדיות זו לזו, ולכן הן משלימות זו את זו ל- 180°.

■הערה: הוכחת המשפט בעמוד 132.

משפט 152: מרובע בו זוג זוויות נגדיות המשלימות זו את זו ל- 180° ניתן לחסימה במעגל.

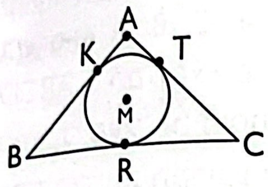


בשרטוט: במרובע ABCD הזוויות A ו- C נגדיות המשלימות זו את זו ל- 180°, כיוון שכך נאמר כי המרובע ABCD בר חסימה, כלומר ניתן לחסום אותו במעגל.

משפט 153: כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

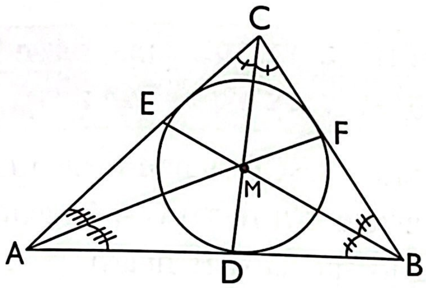
לשון אחר: כל מצולע משוכלל (מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן, וכל זוויותיו שוות זו לזו בגודלן.) הינו בר חסימה.

◈ **מעגל חסום במשולש** – מעגל הנמצא בתוך משולש כך ששלוש צלעות המשולש משיקות לו, נקרא מעגל חסום במשולש.
בשרטוט: המעגל שמרכזו בנקודה M נמצא בתוך המשולש ABC ושלוש צלעות המשולש משיקות למעגל זה, ולכן נאמר כי המעגל חסום במשולש.



◄**הערה:** באמרנו מעגל חסום במשולש, נבחין בכך שהמשולש חוסם את המעגל.

משפט 154: שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודת מרכז המעגל החסום במשולש.



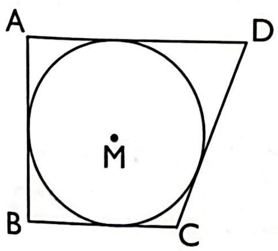
בשרטוט: המעגל שמרכזו M חסום במשולש ABC.
CD חוצה את הזווית C, ‏BE חוצה את הזווית B ו- AF חוצה את הזווית A. שלושת חוצי הזוויות הללו נפגשים בנקודה M, היא מרכז המעגל החסום במשולש.

◄**הערה:** יש להבחין בכך שהנקודה D אינה בהכרח נקודת ההשקה של המעגל וצלע המשולש.

משפט 155: בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

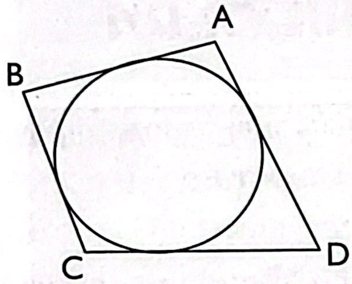
לשון אחר: לכל מעגל ישנו משולש שיכול לחסום אותו.

◈ **מעגל חסום במרובע** – מעגל הנמצא בתוך מרובע כך שארבע צלעות המרובע משיקות לו, נקרא מעגל חסום במרובע.
בשרטוט: המעגל שמרכזו בנקודה M נמצא בתוך המרובע ABCD וארבע צלעות המרובע משיקות למעגל זה, ולכן נאמר כי המעגל חסום במרובע.



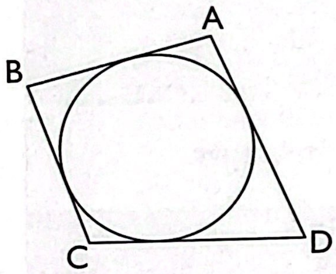
◄**הערה:** באמרנו מעגל חסום במרובע, נבחין בכך שהמרובע חוסם את המעגל.

משפט 156: במרובע החוסם מעגל, סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.



בשרטוט: המרובע ABCD חוסם את המעגל, סכום שתי הצלעות הנגדיות AB ו- CD שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות AD ו- BC.

משפט 157: אם במרובע סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות, הוא יכול לחסום מעגל .



בשרטוט: במרובע ABCD מתקיים כי סכום שתי הצלעות הנגדיות AB ו- CD שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות AD ו- BC, ולכן נאמר כי מרובע זה יכול לחסום מעגל.

משפט 158: בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

לשון אחר: מעגל יכול להיחסם על ידי כל מצולע משוכלל. (מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן, וכל זוויותיו שוות זו לזו בגודלן.)

מעגל חוסם ומעגל חסום - טבלת עזר

סוג המצולע	האם בהכרח יכול לחסום מעגל?	האם בהכרח יכול להיחסם על ידי מעגל?
משולש	✓	✓
דלתון קמור	✓	
דלתון קעור		
מקבילית		
מלבן		✓
מעוין	✓	
ריבוע	✓	✓
טרפז		
טרפז ישר זווית		
טרפז שווה שוקיים		✓
מצולע משוכלל	✓	✓