פרק חמישי - יחסים

ארבעת הפרקים הראשונים עוסקים בזוויות, משולשים, מרובעים ומעגלים. בסוף הפרק השלישי על אודות משפחת המרובעים, ישנה התייחסות למצולעים משוכללים. בפרק זה, החמישי והאחרון בספר, לא נעסוק בצורות הנדסיות חדשות. כאן, נכיר מושגים חדשים כגון יחס, פרופורציה, חלוקת קטע ביחס נתון ועוד. כמו כן, נתייחס בכובד ראש לנושא הלימוד "דמיון משולשים", ננסח ונסביר עשרים ושניים משפטים נוספים הנוגעים ליחסים, ובכך יושלם הספר ויכלול מאה ושמונים משפטים בהנדסת המישור. למען לימוד איכותי של הפרק יש להיות בקיא בתכנים שהובאו בארבעת הפרקים הראשונים, הרי כל שנלמד כאן ובפרט משפטים העוסקים ביחסים מתבסס על שלמדנו בדבר זוויות, משולשים, מרובעים ומעגלים.

יחס ופרופורציה

◈ **יחס** - יהיו שני מספרים a ו- b , כך שהמספר b שונה מאפס. המנה $\frac{a}{b}$ נקראת היחס בין a ל- b. נדגיש כי יחס משמש להשוואה בין שני גדלים. נביא את שתי הדוגמאות הבאות שיסייעו להבין טוב יותר את המונח יחס.

1. לאבי יש 150 מדבקות ולדני יש רק 120 מדבקות. נאמר שהיחס בין מספר המדבקות של אבי לבין מספר המדבקות של דני הוא 150:120 (יש לקרוא זאת משמאל לימין כך: "150 חלקי 120"). המספרים 150 ו- 120 ניתנים לצמצום ב-30, פירושו שניתן לחלק כל אחד מהם ב-30 וכך נקבל 5:4 (קרא: "5 חלקי 4"). קיבלנו כי היחס בין מספר המדבקות של אבי לבין זה של דני הוא 5:4. משמעות הדבר היא פשוטה. ראשית, לאבי יש יותר מדבקות מאשר לדני כיוון שהמספר 5 גדול יותר מ- 4. שנית, אבי יכול להתגאות בכך שבעבור כל 4 מדבקות של דני לו יש 5 מדבקות.

2. נתונים שני משולשים, האחד שהיקפו 10 ס"מ ואילו השני שהיקפו 30 ס"מ. היחס בין היקף המשולש האחד לבין היקף המשולש השני הוא 10:30 (קרא משמאל לימין: "10 חלקי 30"). כאן, משמעות הדבר היא כי היקפו של המשולש האחד קטן פי שלושה מהיקפו של המשולש השני.

◈ **פרופורציה** - יהיו שני מספרים a ו- b, כך שהמספר b שונה מאפס. המנה $\frac{a}{b}$ נקראת היחס בין a ל- b. כמו כן, יהיו שני מספרים c ו- d, כך שהמספר d שונה מאפס. המנה $\frac{c}{d}$ נקראת היחס בין c ל- d. אם היחסים $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ שווים זה לזה, כלומר $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אז נאמר כי קיבלנו שוויון בין יחסים. שוויון בין יחסים נקרא פרופורציה.

◀מסקנות הנובעות מתוך פרופורציה בין מספרים

היחס בין המספר 4 למספר 5 הוא 4:5, ואילו היחס בין 8 ל- 10 הוא 8:10. כיוון שמתקיים השוויון 4:5=8:10, הרי שקיבלנו פרופורציה בין מספרים. נציג את שוויון היחסים כך: $\boxed{\frac{8}{10}=\frac{4}{5}}$ ונסיק מסקנות אחדות מתוך פרופורציה זו:

1. אם $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, אז $8\cdot 5 = 4\cdot 10$, נקרא למסקנה זו כך: "**כפל באלכסון**".
2. אם $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, אז $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$, נקרא למסקנה זו כך: "**פרופורציה של המונים והמכנים**".
3. אם $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, אז $\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$, נקרא למסקנה זו כך: "**החלפת המונים והמכנים**".
4. אם $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, אז $\frac{8}{8+10}=\frac{4}{4+5}$, נקרא למסקנה זו כך: "**הוספת המונה למכנה**".
5. אם $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, אז $\frac{10+8}{10}=\frac{5+4}{5}$, נקרא למסקנה זו כך: "**הוספת המכנה למונה**".

◀מסקנות הנובעות מתוך פרופורציה

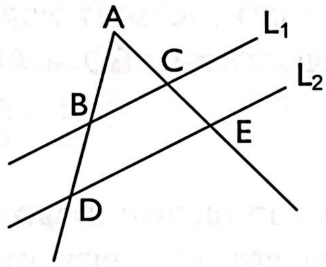
יהיו מספרים a, b, c ו- d, כך שהמספרים b ו- d שונים מאפס, ונאמר שמתקיימת הפרופורציה הבאה: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$. בהתבסס על חמש המסקנות שהובאו תחת "פרופורציה בין מספרים", נצא לחמש המסקנות הבאות המובאות במונחי a, b, c ו- d:

1. "**כפל באלכסון**" : אם $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, אז ad=bc.
2. "**פרופורציה של המונים והמכנים**": אם $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, אז $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$.
3. "**החלפת המונים והמכנים**": אם $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, אז $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$, בתנאי שהמספרים a ו- c שונים מאפס.
4. "**הוספת המונה למכנה**": אם $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, אז $\frac{c}{c+d}=\frac{a}{a+b}$, בתנאי שמתקיים $a+b\neq 0$ וגם $c+d\neq 0$.
5. "**הוספת המכנה למונה**": אם $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, אז $\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$.

◀**הערה:** זכירת חמש המסקנות הנובעות מתוך פרופורציה תסייע ותקל בפתרונות של תרגילים בהם תתקבל פרופורציה.

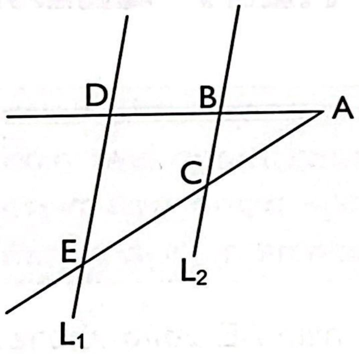
משפטי תאלס

משפט 159- משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים.



בשרטוט: הישרים L_1 ו- L_2 מקבילים זה לזה. L_1 חותך את שוקי הזווית A בנקודות B ו- C ואילו L_2 חותך את שוקי אותה הזווית בנקודות D ו- E נדגיש כי הנקודות B ו- D נמצאות על אותה שוק ואילו הנקודות C ו- E נמצאות על השוק האחרת. כך נוצרו ארבעה קטעים, AB ו- BD על שוק אחת של הזווית A והקטעים AC ו- CE על השוק השנייה. כפי שצוין, הישרים L_1 ו- L_2 מקבילים זה לזה, ולכן ארבעת הקטעים הללו פרופורציוניים. כיוון שהקטעים פרופורציוניים, נאמר שמתקיימת הפרופורציה הבאה: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$.

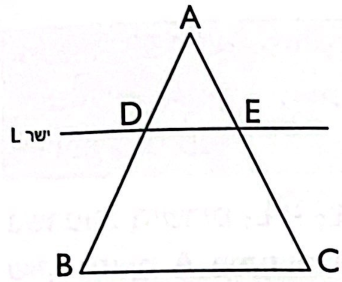
משפט 160- המשפט ההפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים.



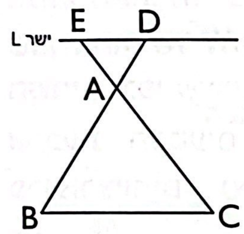
בשרטוט: הישר L_1 חותך את שוקי הזווית A בנקודות D ו- E ואילו הישר L_2 חותך את שוקי אותה הזווית בנקודות B ו- C. B ו- D נמצאות על שוק אחת של הזווית A ואילו C ו- E נמצאות על השוק השנייה. כך נוצרו ארבעת הקטעים: AB, BD, AC ו- CE. נאמר שאם ארבעת הקטעים פרופורציוניים, כלומר $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ אז הישרים L_1 ו- L_2 מקבילים זה לזה.

◀**הערה:** שני המשפטים האחרונים, משפט תאלס והמשפט ההפוך לו, מתייחסים למצב שבו שני ישרים חותכים שוקיים של **זווית** כלשהי, אין הם מתייחסים למשולשים או לכל מצולע הנדסי אחר. קל להבחין כי שני ישרים החותכים שוקי זווית מציגים משולש כלשהו ובתוכו קטע המחבר שתיים מצלעותיו. כיוון שבהנדסת המישור עוסקים רבות במשולשים, המשפט הבא הינו הרחבה של משפט תאלס והוא מקשרו למשולשים.

משפט 161- משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות (או את המשכיהן) בקטעים פרופורציוניים.



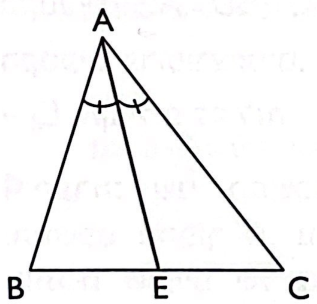
בשרטוט: הישר L חותך את הצלעות AB ו- AC של המשולש ABC בנקודות D ו- E בהתאמה, כך שהוא מקביל לצלע BC. כיוון שכך, נאמר כי היחס בין הקטעים AD ו- BD שווה לזה שבין הקטעים AE ו- CE, כלומר $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$.



◄**הערה:** השרטוט הנ"ל מתאים עבור קו ישר החותך את שתי צלעות המשולש ועובר **בתוך** המשולש, הוא אינו מתאים למקרה בו הקו הישר חותך את **המשכיהן** של צלעות המשולש. נתבונן בשרטוט משמאל ונסביר, זאת כדי לכסות את משפט תאלס המורחב לחלוטין.
הישר L חותך את המשך הצלע AB בנקודה D ואת המשך הצלע AC בנקודה E כך שהוא מקביל לצלע BC כיוון שכך, נאמר כי $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$.

משפטי חוצה זווית במשולש

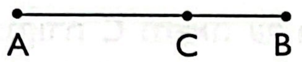
משפט 162 - משפט חוצה זווית פנימית במשולש: חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.



בשרטוט: הקטע AE חוצה את הזווית A במשולש ABC. הנקודה E מחלקת את הצלע BC לשני קטעים, אשר היחס ביניהם שׁווה ליחס שבין הצלעות הכולאות את הזווית A, כלומר $\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}$.

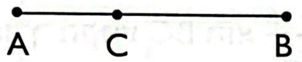
◄**הערה:** כדי להבין את המשפט הבא, ההפוך למשפט חוצה זווית פנימית במשולש נדרש לדעת מהי חלוקה פנימית של קטע כלשהו ביחס נתון. נסביר זאת בטרם ניגש למשפט 163.

◈ חלוקה פנימית של קטע -

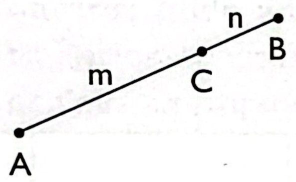


בשרטוט: הנקודה C נמצאת על הקטע AB בין הנקודות A ו- B. הנקודה C מחלקת את הקטע AB חלוקה פנימית לשני הקטעים AC ו- CB.

◈ חלוקה פנימית של קטע ביחס נתון -

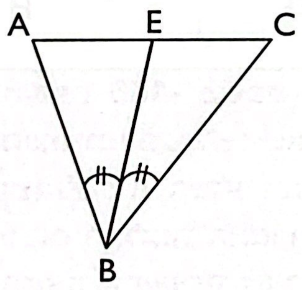


בשרטוט: הנקודה C נמצאת על הקטע AB בין הנקודות A ו- B. היא מחלקת אותו חלוקה פנימית לשני הקטעים AC ו- BC. המיקום המדויק של הנקודה C על הקטע AB, הוא אשר יקבע את היחס בין אורך הקטע AC לבין אורך הקטע CB.



דוגמה: אם אורך הקטע AC הוא m ס"מ ואורך הקטע CB הוא n ס"מ, אז ברור כי אורך הקטע AB הוא m+n ס"מ. כמו כן, נאמר כי הנקודה C מחלקת את הקטע AB חלוקה פנימית כך שהיחס בין אורך הקטע AC לבין אורך הקטע CB הוא m:n, ונכתוב זאת כך: $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$.

משפט 163 - המשפט ההפוך למשפט חוצה זווית פנימית במשולש: ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע מול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה) הוא חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

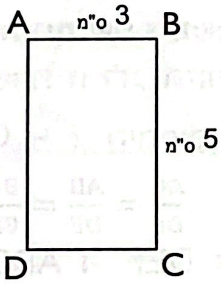


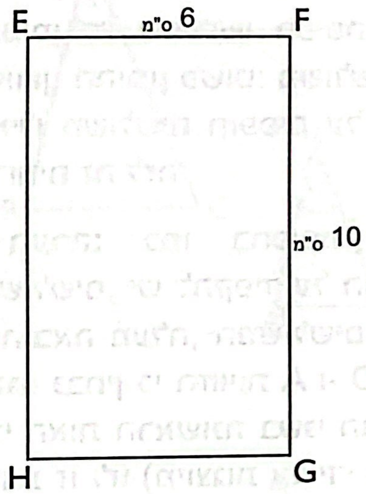
בשרטוט: הנקודה E נמצאת על הצלע AC של המשולש ABC, והיא מחלקת אותה חלוקה פנימית, כך שהיחס בין EA לבין EC שווה ליחס בין AB לבין CB כלומר $\frac{EA}{EC} = \frac{AB}{CB}$.
כיוון שכך, נאמר כי הקטע EB חוצה את הזווית ABC.

◀**הערה:** שני המשפטים האחרונים עוסקים בחוצה זווית פנימית במשולש, בכדי להבין את שני המשפטים הבאים, העוסקים בחוצה זווית חיצונית למשולש נגדיר מהי חלוקה **חיצונית** של קטע ביחס נתון.

מצולעים דומים

◇ **מצולעים דומים** - מצולעים נקראים דומים אם הזוויות שלהם שוות בהתאמה והיחסים בין כל זוג של צלעות מתאימות שווים זה לזה.



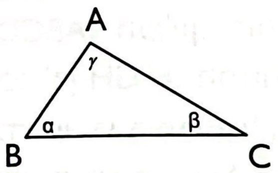


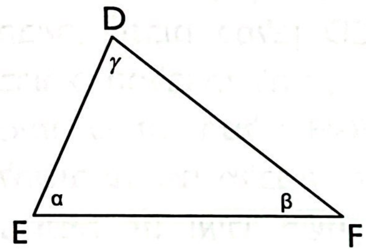
נתבונן בשני המלבנים בשרטוט משמאל. במלבן ABCD, העליון, רוחבו 3 ס"מ ואורכו 5 ס"מ ואילו במלבן EFGH, התחתון, רוחבו 6 ס"מ ואורכו 10 ס"מ. נדגיש, כי רוחבו של המלבן התחתון, גם הוא, ארוך פי שניים מרוחבו של המלבן העליון. כיוון שכך, נאמר כי שני המלבנים הללו דומים זה לזה. בכדי להבין היטב את המושג "דמיון" נעלה במוחנו את הסיטואציה הבאה. נתבונן במלבן ABCD דרך זכוכית מגדלת, ברור כי המלבן הנגלה לעין גדול יותר מהמלבן ABCD, נאמר כי זהו המלבן EFGH. כעת, אנו יכולים כבר לחשוב על שני מלבנים, האחד הוא המקורי (ABCD בדוגמה זו) ואילו השני הוא הנגלה דרך זכוכית המגדלת (EFGH בדוגמה זו). שני המלבנים האלה נקראים מלבנים דומים, כיוון שהיחס בין אורכי שני המלבנים זהה ליחס בין רוחביהם. נרחיב ונאמר, כל צורה הנדסית, באשר היא, דומה לזו הנראית דרך זכוכית המגדלת (או המקטנת) אם נתבונן בה. בפועל, בלימוד הנדסת המישור, אין משתמשים בזכוכית המגדלת או המקטנת. אף על פי כן, מומלץ לזכור את הזכוכית המגדלת (או המקטנת) בהקשר של דמיון מצולעים, כיוון שכך מומחש בתודעתנו המונח מצולעים דומים.

◄**הערה:** אם שני מצולעים דומים זה לזה, אז זוויות המצולע האחד שוות בהתאמה לזוויות המצולע השני. כמו כן, יש לשים לב- כי ההפך אינו נכון בהכרח. יתכנו שני מצולעים שווי זוויות שאינם דומים זה לזה, ריבוע ומלבן הם דוגמה ראויה לכך.

דמיון משולשים

שני משולשים שבהם שוות כל הזוויות בהתאמה וקיים אותו יחס בין כל שתי צלעות מתאימות נקראים משולשים דומים. יחס זה נקרא יחס הדמיון.



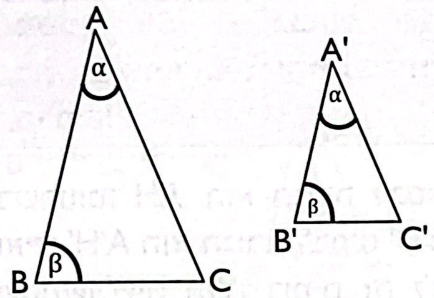


בשרטוט:
נתונים שני המשולשים ABC ו- DEF. הזוויות A ו- D שוות זו לזו, הזוויות B ו- E שוות זו לזו וכך גם הזוויות C ו- F. היחסים $\frac{AC}{DF}$, $\frac{AB}{DE}$ ו- $\frac{BC}{EF}$ שווים זה לזה, כלומר: $\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$. כיוון שכך, נאמר כי שני המשולשים ABC ו- DEF דומים זה לזה, ונכתוב זאת בכתיב מתמטי כך: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.
הסימן ~, הנראה כמו גל, פירושו דמיון, מופיע גם בסימן ≅ שפירושו חפיפה מעל הסימן = שפירושו שוויון, ההיגיון פשוט: משולשים דומים יסומנו על ידי ~ ואילו משולשים חופפים על ידי ≅ , הרי אלה שווים ודומים זה לזה.

◀**הערה:** כמו בחפיפת משולשים, כך בדמיון משולשים, יש להקפיד על **התאמת קדקודים**. בדוגמא שהובאה מעלה, המשולשים ABC ו- DEF דומים זה לזה. נבחין כי הזוויות A ו- D שוות זו לזו (מיוצגות על ידי האות הראשונה בשני המשולשים), הזווית B ו- E שוות זו לזו (מיוצגות על ידי האות השניה), וכן הזוויות C ו- F שוות זו לזו (אלו מיוצגות על ידי האות השלישית בשני המשולשים). נכתוב זאת כך: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

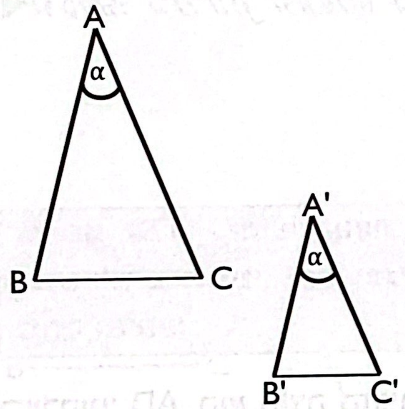
בכדי להבין טוב יותר את המונח "דמיון משולשים", נזכר בזכוכית המגדלת (או המקטנת) שהוזכרה על אודות המצולעים הדומים. אם נתבונן במשולש כלשהו דרך זכוכית מגדלת, יתגלה דרכה משולש גדול יותר. שני המשולשים, המקורי וזה הנגלה דרך זכוכית המגדלת, נקראים משולשים דומים. היחס בין כל זוג צלעות מתאימות בשני המשולשים זהה, הוא נקרא יחס הדמיון של שני משולשים הדומים זה לזה.

שלושת משפטי דמיון משולשים



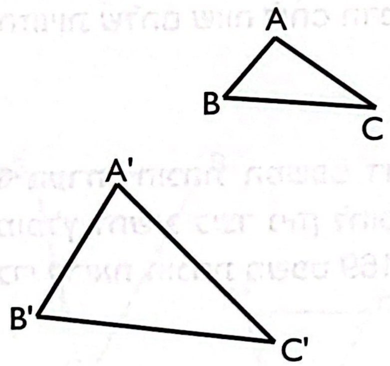
משפט 166: שני משולשים השווים בשתיים מזוויותיהם דומים זה לזה, משפט זה נקרא בקיצור ז.ז.

בשרטוט: הזוויות A ו- 'A שוות זו לזו, כך גם הזוויות B ו- 'B. כיוון שכך נאמר כי המשולשים ABC ו- 'A'B'C דומים זה לזה, ונכתוב זאת כך: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



משפט 167: שני משולשים השווים באחת מזוויותיהם ופרופורציוניים בצלעות הכולאות אותה דומים זה לזה, משפט זה נקרא בקיצור: צ.ז.צ.

בשרטוט: הזוויות A ו- 'A שוות זו לזו, היחסים $\frac{AB}{A'B'}$ ו- $\frac{AC}{A'C'}$ שווים זה לזה, כלומר $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$. כיוון שכך נאמר כי המשולשים ABC ו- 'A'B'C דומים זה לזה, ונכתוב זאת כך: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



משפט 168: שני משולשים הפרופורציוניים בשלוש צלעותיהם דומים זה לזה, משפט זה נקרא בקיצור: צ.צ.צ.

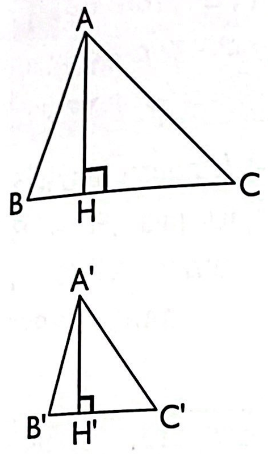
בשרטוט: היחסים $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{AC}{A'C'}$ ו- $\frac{BC}{B'C'}$ שווים זה לזה, כלומר $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$. כיוון שכך נאמר כי המשולשים ABC ו- 'A'B'C דומים זה לזה, ונכתוב זאת כך: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

◄**הערה:** יש להבחין בין משפט חפיפת משולשים צ.ז.צ לבין משפט דמיון משולשים צ.ז.צ.

כמו כן, נבחין בין משפט חפיפת משולשים צ.צ.צ. לבין משפט דמיון משולשים צ.צ.צ.

קווים מיוחדים במשולשים דומים

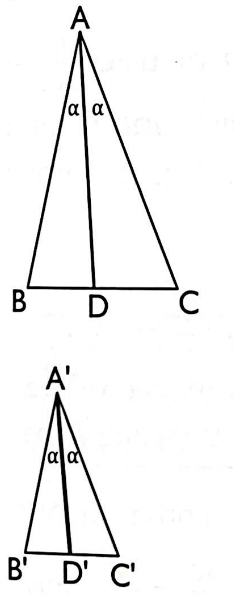
משפט 169 - גבהים של משולשים דומים: במשולשים דומים, יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.



בשרטוט: AH הוא הגובה לבסיס BC במשולש ABC, ואילו A'H' הוא הגובה לבסיס B'C' במשולש A'B'C'. כיוון שהמשולשים הללו דומים זה לזה, נאמר כי היחס בין הגבהים שלהם שווה ליחס הדמיון, כלומר $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'}$.

◀הערה: הוכחת המשפט בעמוד 133.

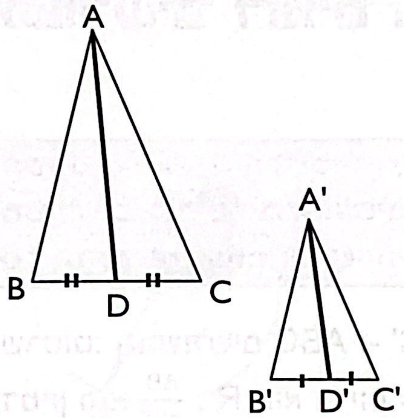
משפט 170 - חוצי זוויות של משולשים דומים: במשולשים דומים, יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.



בשרטוט: AD הוא חוצה הזווית A במשולש ABC, ואילו A'D' הוא חוצה הזווית A' במשולש A'B'C'. כיוון שהמשולשים הללו דומים זה לזה, נאמר כי היחס בין חוצי הזוויות שלהם שווה ליחס הדמיון, כלומר $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$.

◀**הערה:** הוכחת המשפט דומה להוכחת משפט 169, מומלץ לחשוב כיצד ניתן להוכיח את המשפט הנ"ל, תוך כדי קריאת הוכחת משפט 169 המופיע בעמוד 133.

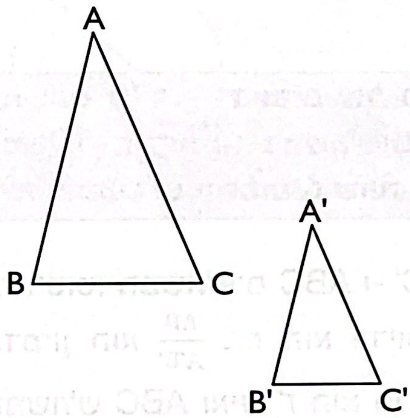
משפט 171 - תיכונים של משולשים דומים:
במשולשים דומים, יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.



בשרטוט: AD הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC, ואילו A'D' הוא תיכון לצלע B'C' במשולש A'B'C'. כיוון שהמשולשים הללו דומים זה לזה, נאמר כי היחס בין התיכונים שלהם שווה ליחס הדמיון, כלומר $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$.

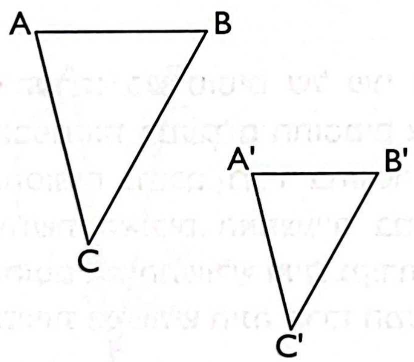
היקפים ושטחים במשולשים דומים

משפט 172 - היקפים של משולשים דומים:
במשולשים דומים, יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.



בשרטוט: המשולשים ABC ו- A'B'C' דומים זה לזה, יחס הדמיון הוא $\frac{AB}{A'B'}$. כיוון שהם דומים זה לזה, נאמר שהיחס בין ההיקפים שלהם שווה ליחס הדמיון, כלומר $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A'B'C'}} = \frac{AB}{A'B'}$.

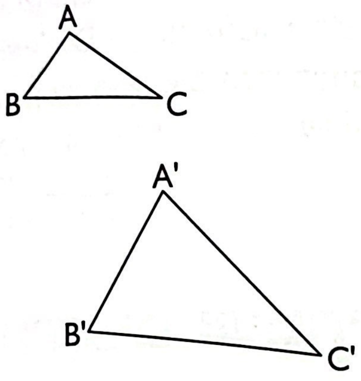
משפט 173 - שטחים של משולשים דומים:
במשולשים דומים, יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.



בשרטוט: המשולשים ABC ו- A'B'C' דומים זה לזה, יחס הדמיון הוא $\frac{AB}{A'B'}$. כיוון שהם דומים זה לזה, נאמר שהיחס בין השטחים שלהם שווה ליחס הדמיון בריבוע, כלומר $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$.

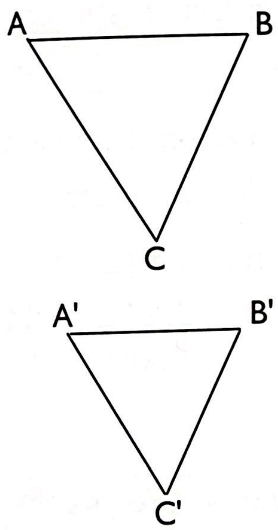
◀ *הערה: הוכחת המשפט בעמוד 134.*

משולשים דומים החוסמים ונחסמים על ידי מעגל



משפט 174 - רדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים: במשולשים דומים, יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

בשרטוט: המשולשים ABC ו- A'B'C' דומים זה לזה, יחס הדמיון הוא $\frac{AB}{A'B'}$. R הוא רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC ואילו R' הוא רדיוס המעגל החוסם את משולש A'B'C'. כיוון שהמשולשים הללו דומים זה לזה, נאמר כי $\frac{AB}{A'B'} = \frac{R}{R'}$.



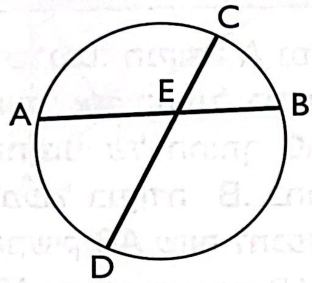
משפט 175 - רדיוסים של מעגלים חסומים על ידי משולשים דומים: במשולשים דומים, יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

בשרטוט: המשולשים ABC ו- A'B'C' דומים זה לזה, יחס הדמיון הוא $\frac{AB}{A'B'}$. r הוא רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC ואילו r' הוא רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש A'B'C'. כיוון שהמשולשים הללו דומים זה לזה, נאמר כי $\frac{AB}{A'B'} = \frac{r}{r'}$.

◀**הערה:** בשרטוטים של שני המשפטים האחרונים לא הוספנו את המעגלים החוסמים את המשולשים הדומים או החסומים בתוכם. נזכיר בהקשר זה כי נקודת המפגש של שלושת האנכים האמצעיים במשולש היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ואילו נקודת המפגש של שלושת חוצי הזוויות במשולש הינה מרכז המעגל החסום בו.

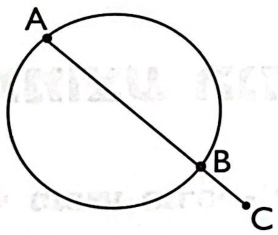
משולשים דומים - משיקים, חותכים, ומיתרים במעגלים

משפט 176: אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.



בשרטוט: המיתרים AB ו- CD נחתכים בנקודה E, כך נוצרים ארבעה קטעים. מכפלת הקטעים EA ו- EB שווה למכפלת הקטעים EC ו- ED, כלומר $EA \cdot EB = EC \cdot ED$.

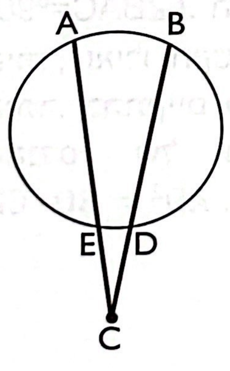
◀**הערה:** הוכחת המשפט מבוססת על הדמיון בין המשולש AED לבין המשולש CEB.



◇ **חותך -** קטע שקצהו האחד על המעגל וקצהו השני מחוץ למעגל והוא חותך את המעגל בנקודה אחת נקרא חותך למעגל.

בשרטוט: הנקודות A ו- B נמצאות על המעגל והנקודה C מחוץ למעגל, כך שהנקודה B נמצאת על הקטע AC. קטע זה נקרא חותך למעגל, הוא חותך את המעגל בנקודה B.

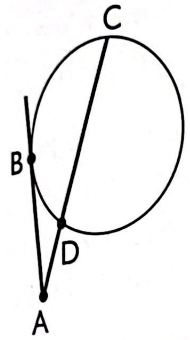
משפט 177: אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.



בשרטוט: הנקודה C נמצאת מחוץ למעגל, הקטע AC חותך את המעגל בנקודה E ואילו הקטע BC חותך את המעגל בנקודה D. EC נקרא חלקו החיצוני של החותך AC ואילו DC נקרא חלקו החיצוני של החותך BC. בהתקיים כל זאת נאמר כי מכפלת החותך AC בחלקו החיצוני EC שווה למכפלת החותך BC בחלקו החיצוני DC, ונכתוב זאת כך: $CA \cdot CE = CB \cdot CD$.

◀הערה: הוכחת המשפט בעמוד 135.

משפט 178: אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים משיק וחותך, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.



בשרטוט: הנקודה A נמצאת מחוץ למעגל, הקטע AC חותך את המעגל בנקודה D כאשר AD נקרא חלקו החיצוני של החותך AC. כמו כן, הקטע AB משיק למעגל בנקודה B. בהתקיים כל זאת נאמר כי ריבוע המשיק AB שווה למכפלת החותך AC בחלקו החיצוני AD ונכתוב זאת כך: $AB^2 = AC \cdot AD$

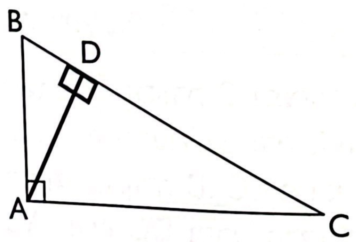
◀*הערה: הוכחת המשפט בעמוד 136.*

ממוצע הנדסי

◇ **ממוצע הנדסי** - יהיו שלושה מספרים כלשהם a, b ו- c השונים מאפס. אם מתקיים השוויון הבא: $b^2 = a \cdot c$, אז נאמר כי המספר b הינו הממוצע ההנדסי של המספרים a ו- c.

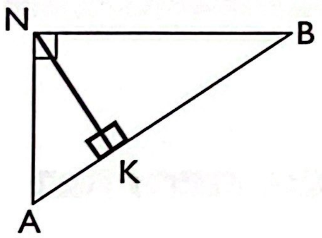
◀**הערה:** המונח ממוצע הנדסי הוגדר בעבור שלושה מספרים, מובן כי נכון הוא גם בעבור אורכיהם של שלושה קטעים.

משפט 179: הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.



בשרטוט: AD הוא הגובה ליתר BC במשולש BAC (∡BAC=90°). הקטע BD נקרא היטל הניצב AB על היתר, ואילו הקטע CD נקרא היטל הניצב AC על היתר. בהתקיים כל זאת נאמר כי AD הוא הממוצע ההנדסי של הקטעים BD ו- CD כלומר $AD^2 = BD \cdot CD$.

משפט 180 - משפט אוקלידס: במשולש ישר זווית הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.



בשרטוט: AB הוא היתר של המשולש ישר הזווית ANB ($\measuredangle ANB=90°$), AK נקרא ההיטל של הניצב AN על היתר. בהתקיים כל זאת נאמר כי הניצב AN הוא ממוצע הנדסי של AB ו- AK כלומר $AN^2 = AB \cdot AK$.

◄**הערה:** ניתן להשתמש במשפט זה בהקשר לניצב האחר של המשולש, הוא NB. נאמר כי הניצב NB הינו הממוצע ההנדסי של היטלו על היתר BK והיתר AB, כלומר $BN^2 = AB \cdot BK$