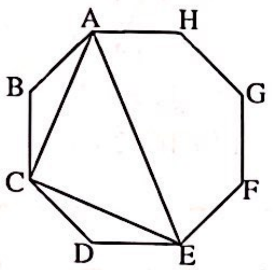
מצולעים

.1 נתון ABCDEFGH מתומן משוכלל.



על פי נתונים אלו ונתוני הסרטוט,

$$\frac{CE^2}{AE^2} = ?$$

(1) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{4}$

.2 סכום הזוויות הפנימיות של מצולע בעל a צלעות גדול ב-$180°$ מסכום הזוויות הפנימיות של מצולע בעל b צלעות.

$a - b = ?$

(1) 1

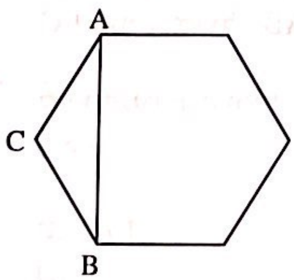
(2) 2

(3) 3

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

.3 בסרטוט שלפניכם משושה משוכלל.

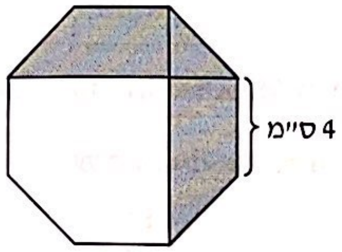
נתון: $AB = 3$ ס״מ



על-פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,
מה אורכו של BC (בס״מ)?

(1) $3\sqrt{2}$ **(2)** 2 **(3)** $\sqrt{3}$ **(4)** $2\sqrt{3}$

.4 במתומן משוכלל שצלעו 4 ס"מ העבירו שני אלכסונים (ראה סרטוט).



לפי נתון זה ונתוני הסרטוט,
מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?

(1) $8 + 4\sqrt{3}$
(2) $16 + 8\sqrt{3}$
(3) $4 + 12\sqrt{2}$
(4) $12 + 16\sqrt{2}$

.5 נגדיר את A כסכום הזוויות במצולע בעל 7 צלעות ואת B כסכום הזוויות במצולע בעל 10 צלעות.

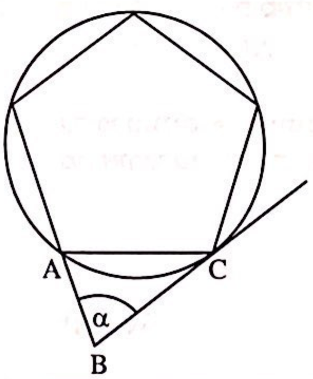
לפיכך, ההפרש $B - A$ שווה בערכו לסכום הזוויות של -

(1) משולש
(2) מרובע
(3) מחומש
(4) אף אחת מהתשובות שלעיל אינה נכונה

.6 מה היחס בין סכום הזוויות החיצוניות של משולש שווה-שוקיים לבין סכום הזוויות החיצוניות של משושה **לא** משוכלל?

(1) $1 : 1$
(2) $1 : 2$
(3) $1 : 3$
(4) אי אפשר לדעת מן הנתונים

.7 בסרטוט שלפניכם מחומש משוכלל חסום בתוך מעגל.
BC משיק למעגל ו-AB הוא המשך צלע המחומש.

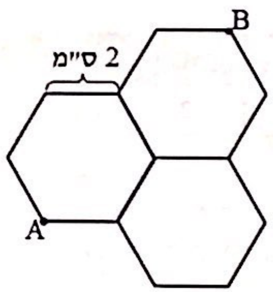


לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

(1) 108°
(2) 72°
(3) 60°
(4) 36°

---

8. בסרטוט שלפניכם 3 משושים משוכללים חופפים שאורך צלעם 2 ס״מ.



מה המרחק בין הנקודות A ו-B (בס״מ)?

(1) 8

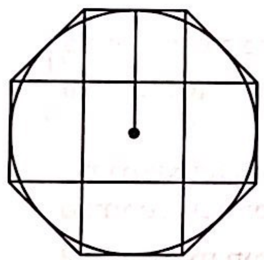
(2) $\sqrt{27}$

(3) 6

(4) $\sqrt{52}$

---

9. בתוך מתומן משוכלל שצלעו שווה 2 ס״מ חסום מעגל.



לפי נתון זה ונתוני הסרטוט,
מה רדיוס המעגל (בס״מ)?

(1) $2\sqrt{2}+2$

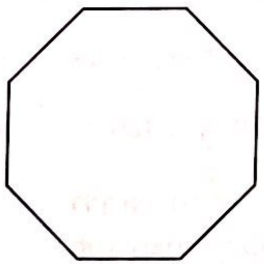
(2) $2+4\sqrt{2}$

(3) $1+\sqrt{2}$

(4) אי-אפשר לדעת לפי הנתונים

---

10. נתון מתומן משוכלל שאורך צלעו הוא 2 ס״מ.



מה שטחו של המתומן (בסמ״ר)?

(1) $16+8\sqrt{2}$

(2) $32+16\sqrt{2}$

(3) $16+16\sqrt{2}$

(4) $8+8\sqrt{2}$

תשובות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
4	3	4	2	1	3	4	3	1	2	תשובה

פתרתי 10 שאלות - _________ נכונות, _________ אחוזי הצלחה

1. תשובה (2) נכונה.

מכיוון שמדובר במתומן משוכלל, המשולש ACE הוא משולש כסף: האלכסונים AC ו-CE שווים זה לזה, והזווית ∢ACE היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר (AE) במעגל שחוסם את המתומן.

כדי למצוא את היחס שנשאלנו עליו נצטרך למצוא את גדלי הצלעות CE ו-AE, שהן ניצב ויתר במשולש.
מכיוון שמדובר במשולש כסף, אנו יודעים כי מתקיים בין צלעותיו יחס קבוע: היתר תמיד גדול מהניצב פי $\sqrt{2}$. נמצא את היחס בין הניצב ליתר ונעלה אותו בריבוע:

$$\frac{CE}{AE}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{CE^2}{AE^2}=\left(\frac{CE}{AE}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

היחס שחיפשנו שווה ל-$\frac{1}{2}$.

---

2. תשובה (1) נכונה.

דרך א – הבנה

חוקי מצולעים קובעים כי בכל הוספה של צלע למצולע, נוספות $180°$ לסכום זוויותיו (למשל, במשולש יש $180°$ ובמרובע $360°$). לכן אם סכום הזוויות במצולע בעל a צלעות גדול ב-$180°$ מסכום הזוויות במצולע בעל b צלעות, ההפרש בין מספר הצלעות הוא בדיוק 1.

דרך ב – חישוב

הנוסחה לחישוב סכום זוויות במצולע היא: $180(n-2)$.

סכום הזוויות במצולע בעל a צלעות הוא: $180(a-2)$.

סכום הזוויות במצולע בעל b צלעות הוא: $180(b-2)$.

אנו יודעים כי סכום הזוויות של מצולע a גדול ב-$180°$ מהמצולע השני ולכן ניתן לבנות משוואה:

$$180(a-2)=180+180(b-2)$$

נצמצם ב-180:

$$a-2=1+b-2$$

נעביר אגפים:

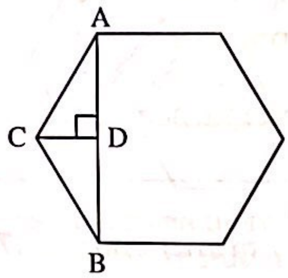
$$a-b=1$$

ההפרש בין a ל-b הוא 1.

3. תשובה (3) נכונה.

כמעט כל צורה פנימית אשר נוצרת בין אלכסוני המשושה ניתנת לחלוקה למשולש זהב.
עלינו למצוא את משולש הזהב הכולל הן את הנתון והן את הצלע המבוקשת.
במקרה שלפנינו משולש ABC הוא שווה-שוקיים. נוריד גובה מנקודה C.
הגובה במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה וגם תיכון.
מכאן ש- AD חוצה את משולש ABC לשני משולשי זהב אשר יחס הצלעות שלהן הוא : $1:\sqrt{3}:2$

הצלע הנתונה, AB=3 ולכן DB=1.5.



נציב את הנתונים הידועים לנו בטבלת היחסים :

הצלע :	BC	DB	CD
היחס :	2	$\sqrt{3}$	1
הנתון :		1.5	

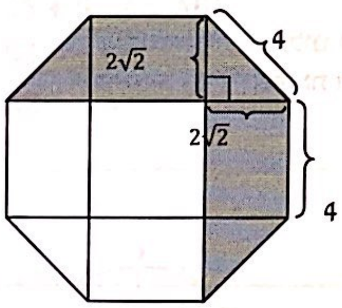
נפתור בעזרת ערך משולש :

$$BC = \frac{1.5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

---

4. תשובה (4) נכונה.

כאשר מבקשים שטח מתומן משוכלל (או חלק מהשטח), תמיד נעביר אלכסונים במתומן כמתואר בסרטוט :
נחשב את אורך הניצבים של המשולש על-פי יחסי צלעות במשולש כסף -
$a : a : a\sqrt{2}$



מכיוון שהיתר שווה ל-4, על-מנת להגיע לניצב עלינו לחלק אותו ב- $\sqrt{2}$:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

השטח הכהה מורכב משני מלבנים ומ-3 משולשים. נחשב את שטחו :

$2 \cdot$ מלבן $+ 3 \cdot$ משולש $=$

$$2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2} + 12$$

---

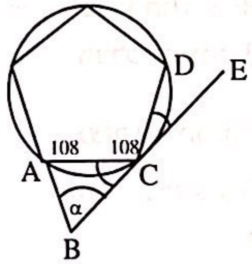
5. תשובה (3) נכונה.

זו שאלת הבנה.
למדנו כי תוספת של צלע אחת למצולע מגדילה את סכום הזוויות ב-$180°$ מעלות, לפיכך תוספת של שלוש צלעות (ההפרש בין מעושר למשובע) מגדילה את סכום הזוויות ב-$540°$ (שלוש פעמים $180°$).
סכום זה שווה בערכו לסכום הזוויות של מחומש.

.6 תשובה (1) נכונה.

סכום הזוויות החיצוניות של כל המצולעים בעולם הוא $360°$, לכן סכום הזוויות החיצוניות של כל אחד המצולעים הנתונים בשאלה הוא גם $360°$, ולכן, היחס בין סכומי הזוויות החיצוניות של המצולעים הנתונים בשאלה הוא $1:1$.
למען ההוכחה, ניתן לבחור משולש ומשושה, להציב זוויות כלשהן ולחשב.

.7 תשובה (2) נכונה.



במחומש משוכלל גודל כל זווית פנימית הוא $108°$. זווית $\sphericalangle CAB$ היא זווית הצמודה לזווית הפנימית של המחומש ולכן היא משלימה את $108°$ ל-$180°$:

$$\sphericalangle CAB + 108° = 180°$$
$$\sphericalangle CAB = 72°$$

כעת נתבונן על קודקוד C. זווית $\sphericalangle DCA$ שווה $108°$ מכיוון שהיא זווית של המחומש. הזוויות $\sphericalangle ACB$ ו-$\sphericalangle DCE$ שוות זו לזו מכיוון שהמחומש הוא משוכלל. שלוש הזוויות הללו משלימות ל-$180°$:

$$\angle ACD+\angle DCE+\angle ACB=180$$
$$108+\angle DCE+\angle ACB=180$$
$$\angle DCE+\angle ACB=72°$$

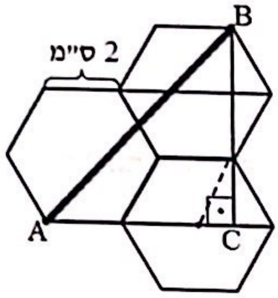
כיוון ששתי הזוויות שוות, ניתן לומר כי:

$$\angle DCE=\angle ACB=36°$$

כדי למצוא את α, עלינו לבנות משוואה של סכום זוויות במשולש. סכום הזוויות במשולש ABC הוא $180°$ ולכן נציב במשוואה את הנתונים שקיבלנו:

$$\angle CAB+\angle ACB+\alpha=180$$
$$72+36+\alpha=180$$
$$\alpha=72°$$

.8 תשובה (4) נכונה.

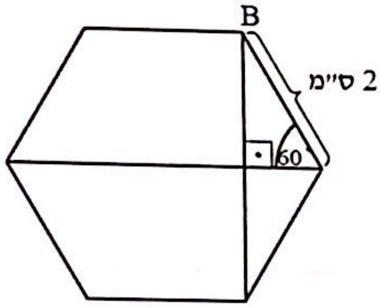


נסרטט את הקו המחבר בין הנקודות A ל-B. קטע זה אינו אחד מקווי הסימטריה הרבים במשושה משוכלל, ולכן נצטרך למצוא דרך יצירתית לחשב אותו. מכיוון שהוא לא בנוי מצלעות או מאלכסונים שאנו יודעים לחשב את אורכם, נוכל לבנות משולש ישר-זווית כך שהוא יהיה היתר שלו, ולמצוא את אורכי ניצביו.

ראשית, הניצב AC מורכב מצלע המשושה, רדיוס המשושה (המרחק ממרכז המעגל החוסם את המשושה אל הקודקוד - שניהם שווים זה לזה) וקטע קטן נוסף ששווה לחצי מאורך הרדיוס, מכיוון שנחצה על ידי גובה (במשולש שווה-צלעות המסומן בקו מקווקו הגובה הוא גם תיכון).

מאחר שאורך צלע המשושה (וגם הרדיוס) הוא 2 ס"מ, אורכו של הקטע AC הוא 5 ס"מ (שתי צלעות וחצי).

כעת נמצא את אורך הניצב BC: נראה שהוא מורכב משלושה קטעים שווים, שכל אחד מהם הוא ניצב במשולש ישר-זווית שנוצר בין האלכסונים במשושה.



נביט לרגע בקטע הרלוונטי ונמצא את אורכו:

מכיוון שהאלכסון החוצה את המשושה לאורכו חוצה גם את הזוויות שלו, קיבלנו במשולש זווית של $60°$, ועל כן זהו משולש זהב.

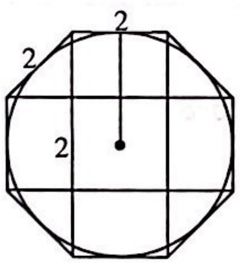
אנו יודעים כי אורך היתר של המשולש (צלע המשושה) הוא 2 ס"מ, לכן אורך הניצב הקטן הוא 1 והניצב הגדול - $\sqrt{3}$.

גילינו כי אורך כל קטע כזה שווה ל-$\sqrt{3}$, ולכן אורך הניצב BC שווה ל-$3\sqrt{3}$.

כעת נשתמש במשפט פיתגורס כדי למצוא את אורך היתר:

$$5^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = AB^2$$
$$25 + 9 \cdot 3 = AB^2$$
$$52 = AB^2 \quad /\sqrt{}$$
$$AB = \sqrt{52}$$

.9 תשובה (3) נכונה.



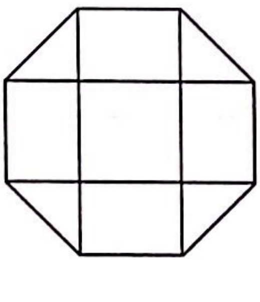
נחלק את המתומן כמתואר בסרטוט: צלע הריבוע הפנימי היא 2.

ארבעת המשולשים הם משולשי כסף שבהם היתר שווה ל-2.

לפי היחס $1:1:\sqrt{2}$, הניצבים שווים ל- $\sqrt{2}$.

רדיוס המעגל שווה ל- $1+\sqrt{2}$.

.10 תשובה (4) נכונה.



כדי למצוא את שטח המתומן נחלק אותו באופן הבא לריבוע, ארבעה מלבנים וארבעה משולשים:

נוסחה למציאת שטח מתומן משוכלל: $x + x\sqrt{2}$ כאשר x שווה לפעמיים שטח הריבוע שבמרכז. צלעו שווה ל-2 כצלע המתומן, ולכן שטחו שווה 4.

לכן פעמיים שטח הריבוע = 8, ושטח המתומן: $8 + 8\sqrt{2}$.