

## מבחן מס' 5

### מתמטיקה

#### 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון ושני הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: חמש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח הערכה: בבחינה זו 11 שאלות בהתאם לפירוט הבא:

- שאלה מס' 1 – בעיית הספק – 9 נקודות
- שאלה מס' 2 – סדרה חשבונית – 9 נקודות
- שאלה מס' 3 – גאומטרייה – 9 נקודות
- שאלה מס' 4 – חקירת פונקציה רציונלית – 9 נקודות
- שאלה מס' 5 – חקירת פונקציה אי רציונלית – 9 נקודות
- שאלה מס' 6 – חקירת פונקציה מעריכית – 9 נקודות
- שאלה מס' 7 – חקירת פונקציה לוגריתמית – 9 נקודות
- שאלה מס' 8 – בעיית קיצון – 9 נקודות
- שאלה מס' 9 – הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת – 9 נקודות
- שאלה מס' 10 – גאומטרייה אנליטית – 10 נקודות
- שאלה מס' 11 – בעיית גדילה ודעיכה – 9 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- (2) שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

**ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

**בהצלחה!**

## השאלות

### בעיית הספק

1. על שני פועלים הוטלה מלאכת ייצור של 60,000 ברגים. הראשון החל את עבודתו בשעה 08:30, שעה לפני חברו, ובשעה 11:30 התברר כי השניים ייצרו 46% מהברגים הנ"ל. בתום עבודתם דהיינו עת סיימו לייצר את כלל הברגים שנדרשו הבחינו כי הפועל הראשון ייצר 60% מן הברגים ואילו חברו ייצר את יתרת הברגים. כמה ברגים בשעה מייצר הפועל השני?

### סדרה חשבונית

2. א. נתונה סדרה חשבונית בה מספר אי זוגי של איברים. הוכח כי מחצית סכום האיבר הראשון והאחרון שווה לאיבר האמצעי.  
 ב. נתונה סדרה חשבונית בה מספר אי זוגי של איברים. הוכח כי מכפלת מספר איברי הסדרה באיבר האמצעי שווה לסכום כל איברי הסדרה.

### גאומטרייה

3. AE משיק למעגל בנקודה E, ABC חותך למעגל. הקטעים DE ו-AC מקבילים זה לזה.

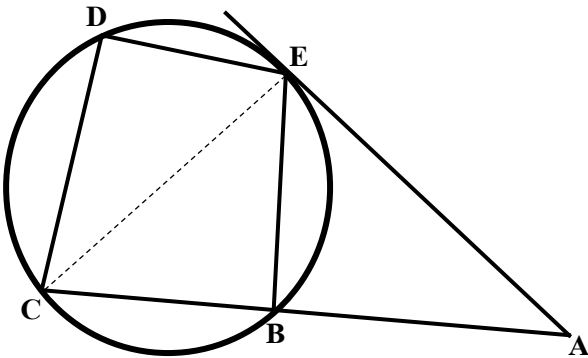
נתון:  $DE=9$ ,  $BC=12$ ,  $AB=4$ .

א. מצא את אורך המשיק AE.

ב. הוכח כי המשולשים ECA ו-DEC דומים.

ג. מצא את היחס בין שטח המשולש CDE

לבין שטח הטרפז ACDE.



### חקירת פונקציה רציונלית

4. נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ . פרמטר הגדול מ-0.

א. חקור את הפונקציה בהתאם לשלבים הבאים:

(1) תחום הגדרה

(2) נקודות קיצון

(3) תחומי עלייה וירידה

(4) נקודות פיתול

(5) תחומי קעירות כלפי מעלה ותחומי קעירות כלפי מטה

(6) נקודות חיתוך עם הצירים

(7) אסימפטוטות המקבילות לצירים

ב. הצג סקיצה של גרף הפונקציה

**חקירת פונקציה אי רציונלית**

5. נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{mx+n}{x+\sqrt{x}}$ . גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלה

בנקודה  $(\frac{1}{64}, 8)$ .

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $m$  ו- $n$ .

ב. הצב את ערכי הפרמטרים  $m$  ו- $n$  שמצאת בסעיף א במשוואת הפונקציה וחקור אותה בהתאם

לסעיפים הבאים:

(1) תחום הגדרה

(2) נקודות קיצון

(3) תחומי עלייה וירידה

(4) נקודות חיתוך עם הצירים

(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים

ג. הצג סקיצה של גרף הפונקציה.

**חקירת פונקציה מעריכית**

6. נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - a}$ . הפרמטר  $a$  גדול מ-1.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה ים הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצא את שלוש משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ד. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ה. הצג סקיצה של גרף הפונקציה.

**חקירת פונקציה לוגריתמית**

7. נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = ax \cdot \ln(x - 2)$ . הפרמטר  $a$  שונה מאפס. שיפוע הפונקציה

בנקודת הפיתול שלה הוא  $2 + \ln 2$ .

א. מצא את  $a$ .

ב. הצב את ערכו  $a$  שמצאת בסעיף א במשוואת הפונקציה וחקור אותה בהתאם לסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) תחומי קעירות כלפי מעלה ותחומי קעירות כלפי מטה.

ג. נתון כי  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום

הגדרתה.

**בעיית קיצון**

8. קו ישר משיק לפרבולה  $y = x^2 + 27$  בנקודה A ברביע הראשון וחותך את ציר ה- $x$  בנקודה C. דרך

הנקודה A הורד אנך לציר ה- $x$  החותך אותו בנקודה B. מצא את שיעורי הנקודה A עבורה שטח

המשולש ABC הוא הקטן ביותר.

**הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת**

9. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $-8 \leq x \leq 0$ .  
 הפונקציה עולה כאשר  $-7 < x < -5$  או  $-1 < x < 0$ ,  
 ויורדת כאשר  $-8 < x < -7$  או  $-5 < x < -1$ .  
 א. הצג סקיזה אפשרית של  $f'(x)$  בתחום  $-8 \leq x \leq 0$ .  
 ב. הצג סקיזה אפשרית של  $f''(x)$  בתחום  $-8 \leq x \leq 0$  אם נתון כי לפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות פיתול.

**גאומטרייה אנליטית**

10. נתונות הנקודות  $A(2,0)$  ו-  $B(0,4)$ . (הנקודה  $O$  היא נקודת ראשית הצירים). מנקודה  $D$  הנמצאת על הקטע  $OA$  ( $D$  אינה מתלכדת עם קצות הקטע) מעלים אנך לציר ה- $x$  החותך את הישר  $AB$  בנקודה  $C$ . מצא את המקום הגאומטרי של נקודות החיתוך של הישרים  $OC$  ו-  $BD$ .

**בעיית גדילה ודעיכה**

11. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא פרק הזמן שבסופו נשארת מחצית מכמותו ההתחלתית. נגדיר "זמן רבע חיים" של חומר רדיואקטיבי כפרק הזמן שבסופו נשארת רבע מכמותו ההתחלתית. זמן רבע החיים של חומר  $A$  שווה לזמן מחצית החיים של חומר  $B$ . אם מ-  $100$  גרם של חומר  $A$  נשארו  $80$  גרם כעבור  $4$  שנים, מאיזו כמות של חומר  $B$  יישארו  $80$  גרם כעבור  $4$  שנים?

**בהצלחה!**